Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

4η Σειρά Ασκήσεων - Ολοκλήρωμα Riemann

1. (α) Δίνεται συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(a) = c \neq 0$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (a,b]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(β) Έστω $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $g(t_i) \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και $g(x) = 0$, για κάθε $x \notin \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)dx = 0$.

(γ) Δίνονται συναρτήσεις $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη και η ψ διαφέρει από την ϕ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων. Δείξτε ότι και η ψ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx$.

(α) Υποθέτουμε ότι $c > 0$. (Η απόδειξη στην άλλη περίπτωση είναι όμοια.)

Τότε, για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ είναι $L(f,P) = 0$.

Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$.

Θα δείξουμε ότι και $\overline{\int_a^b} f(x)dx = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P_0 του $[a,b]$ με $\mathcal{U}(f,P_0) < \varepsilon$.

Επιλέγουμε $t_1 \in (a,b)$ με $t_1 - a < \frac{\varepsilon}{c}$.

Θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_0 = \{a = t_0 < t_1 < t_2 = b\}.$$

Είναι $M_0 = c$ και $M_1 = 0$, άρα

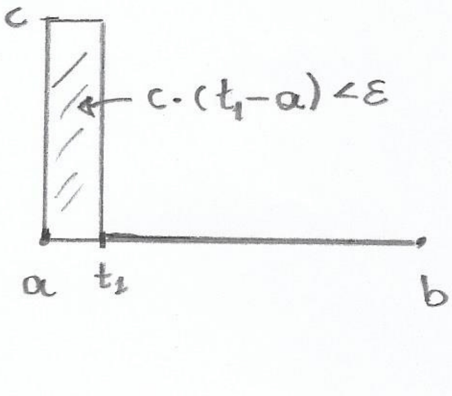
$$\mathcal{U}(f,P_0) = M_0 \cdot (t_1 - a) + 0 \cdot (b - t_1) = c \cdot (t_1 - a) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq 0$ και τελικά ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = 0,$$ δηλαδή η

η f είναι ολοκληρώσιμη με

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$



(β) Όμοια όπως στο (α) μπορούμε να δείξουμε ότι αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0 \ \forall x \neq b$ και $f(b) = c \neq 0$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Έστω τώρα $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$ και $f(a) = c_1 \neq 0$, $f(b) = c_2 \neq 0$. Τότε, επιλέγοντας $d \in (a,b)$ τυχόν, έχουμε, σύμφωνα με το (α) και την προηγούμενη παρατήρηση, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[\alpha, d]$ και $[d,b]$ με $\int_a^d f(t)\,dt = 0$ και $\int_d^b f(t)\,dt = 0$.

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = 0.$$

Έστω τώρα $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $\{t_1, \dots, t_k\} \subseteq [a,b]$ ώστε $g(t_i) \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, k$ και $g(x) = 0 \ \forall x \notin \{t_1, \dots, t_k\}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a < t_1 < t_2 < \dots < t_k < b$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η g είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\dots$, $[t_k, b]$ και το ολοκλήρωμά της σε καθένα από αυτά είναι ίσο με 0. Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{t_k}^{b} f(x)\,dx = 0.$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g = \psi - \varphi$.

Έχουμε ότι η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του ερωτήματος (β), αφού διαφέρει από το 0 σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[a,b]$.

Έπεται ότι η g είναι ολοκληρώσιμη με

$$\int_a^b g(t)\,dt = 0.$$

Τέλος, η $\psi = (\psi - \varphi) + \varphi = g + \varphi$ είναι ολοκληρώσιμη ως άθροισμα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

2. Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και αν ναι, βρείτε το ολοκλήρωμά της:

(α) $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \notin \{1, \frac{1}{2}, \ldots\}$.

(β) $f(x) = x$, αν $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ (όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών).

(α) Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι κάθε υποδιάστημα $[x,y]$ του $[0,1]$ περιέχει αριθμό t με $t \notin \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, για κάθε διαμέριση

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1\}$$

του $[0,1]$, ισχύει $m_i = 0$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$ και τελικά ότι, για κάθε διαμέριση P είναι $L(f,P) = 0$.

Άρα $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$.

Για να δείξουμε ότι και $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε με $U(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ με $\boxed{\frac{1}{k_0^2} < \frac{\varepsilon}{2}}$ (1)

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της συνάρτησης f στο διάστημα $[\frac{1}{k_0}, 1]$ είναι μία συνάρτηση που διαφέρει από την $h \equiv 0$ σε πεπερασμένο μόνο πλήθος σημείων – στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k_0 - 1}, \frac{1}{k_0}$.

Από την Άσκηση 1(β) παίρνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\frac{1}{k_0}, 1]$ με
$$\int_{\frac{1}{k_0}}^{1} f(x)\,dx = 0.$$

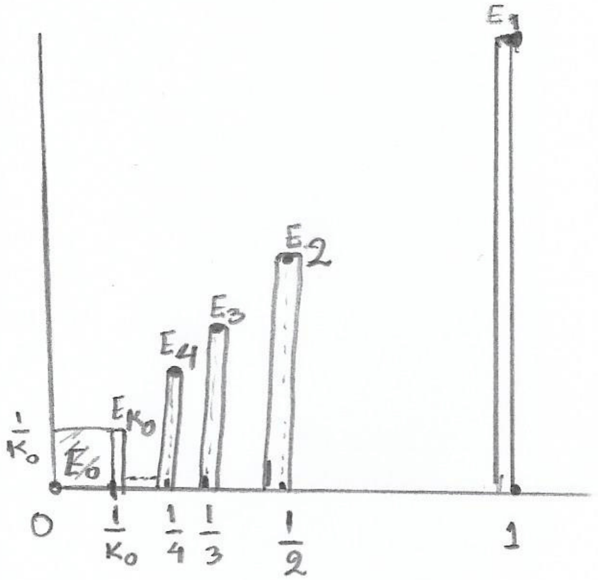
Υπάρχει λοιπόν διαμέριση
$$P_1 = \{ \tfrac{1}{k_0} = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1 \}$$
του $[\frac{1}{k_0}, 1]$ με
$$\boxed{\mathcal{U}(f, P_1, [\tfrac{1}{k_0}, 1]) < \tfrac{\varepsilon}{2}} \qquad (2)$$

Επιλέγουμε ως διαμέριση του $[0,1]$ την
$$P_\varepsilon = \{0\} \cup P_1 = \{ 0 = t_0 < \tfrac{1}{k_0} = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1 \}$$

Παρατηρούμε ότι $M_0 = \sup\{ f(x) : x \in [0, \frac{1}{k_0}] \} = \frac{1}{k_0}$ και
$$\mathcal{U}(f, P_\varepsilon) = M_0 \cdot (\tfrac{1}{k_0} - 0) + \mathcal{U}(f, P_1, [\tfrac{1}{k_0}, 1])$$
$$\Rightarrow \mathcal{U}(f, P_\varepsilon) = \frac{1}{k_0^2} + \mathcal{U}(f, P_1, [\tfrac{1}{k_0}, 1]) \underset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ και τελικά ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

2(a)



$$E_1 + E_2 + \ldots + E_{K_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$E_0 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Το σχήμα δείχνει το άνω άθροισμα $U(f, P_\varepsilon)$

2(β)

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, αφού κάθε υποδιάστημα του $[0,1]$ περιέχει άρρητο αριθμό, για κάθε διαμέριση

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$$ του $[0,1]$

ισχύει $m_i = 0$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$

και άρα $L(f, P) = 0$.

Έπεται ότι $\displaystyle\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$.

Θα δείξουμε ότι, από την άλλη μεριά, για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$ ισχύει $U(f, P) \geq \frac{1}{4}$.

Έστω P τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$.

Θεωρούμε την $P_1 = \{\frac{1}{2}\} \cup P$

Έστω $P_1 = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \frac{1}{2} < t_{k+1} < \ldots < t_n = 1\}$

Αφού κάθε διάστημα περιέχει ρητό, για κάθε $i = k, k+1, \ldots, n-1$, ισχύει $M_i \geq q_i \geq \frac{1}{2}$, όπου $q_i \in \mathbb{Q} \cap [t_i, t_{i+1}]$. Συμπεραίνουμε ότι

$$U(f, P_1) \geq M_k \cdot (t_{k+1} - \tfrac{1}{2}) + M_{k+1}(t_{k+2} - t_{k+1}) + \ldots + M_{n-1}(1 - t_{n-1})$$
$$\geq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

Όμως, αφού η P_1 είναι εκλέπτυνση της P (ή $P_1 = P$), ισχύει

$$\mathcal{U}(f, P) \geq \mathcal{U}(f, P_1) \geq \frac{1}{4}$$

και, αφού η P ήταν τυχούσα διαμέριση, ισχύει τελικά

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \geq \frac{1}{4}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

3. (α) Δείξτε ότι, αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και έχει την ιδιότητα ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, είναι σωστό ότι η g είναι κατ' ανάγκη ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$;

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}$$

με $h = f - g$.

Αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, έχουμε ότι η h είναι ολοκληρώσιμη.

Επιπλέον ισχύει $h(q) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$.

Αφού κάθε διάστημα περιέχει ρητό, παίρνουμε ότι: Αν

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

είναι οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$, τότε για κάθε $i = 0, 1, \dots, n-1$, επιλέγοντας $q_i \in \mathbb{Q} \cap [t_i, t_{i+1}]$, έχουμε

$$m_i(h) \le h(q_i) \le M_i(h),$$

δηλαδή $\quad m_i(h) \le 0 \le M_i(h) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$.

Έπεται ότι

$$L(h, P) \le 0 \le U(h, P), \text{ για κάθε διαμέριση } P \text{ του } [a, b],$$

άρα $\quad \underline{\int_a^b} h(x)dx \le 0 \le \overline{\int_a^b} h(x)dx$

και, αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\int_a^b h(x)dx = 0.$$

Όμως $\quad \int_a^b h(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Συμπεραίνουμε ότι $\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(β) Το συμπέρασμα δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

Παράδειγμα:
Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$, σταθερή συνάρτηση, η οποία είναι, ως γνωστόν, ολοκληρώσιμη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση του Dirichlet $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Τότε $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, αλλά, όπως ξέρουμε (Σημειώσεις, Παράδειγμα (γ), σελ. 61), η g δεν είναι ολοκληρώσιμη.

('Ενα άλλο παράδειγμα δίνεται από τη συνάρτηση της Άσκησης 28)

4. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $A \subseteq [a,b]$. Δείξτε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\} = \sup\{f(x) : x \in A\} - \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ολοκληρώματος και το κριτήριο του Riemann (χωρίς το Θεώρημα 4.4.8), αποδείξτε ότι:

(i) η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(ii) η συνάρτηση f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(γ) Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, ισχύει κατ' ανάγκη ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$;

(δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, να αποδείξετε ότι και οι συναρτήσεις $\phi = \max\{f,g\}$ και $\psi = \min\{f,g\}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ (όπου $\forall x \in [a,b]$ $\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ και $\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$).
(*Υπόδειξη:* Για κάθε $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι $\max\{\gamma, \delta\} = \frac{1}{2}(\gamma + \delta + |\gamma - \delta|)$ και ανάλογος τύπος ισχύει για το $\min\{\gamma, \delta\}$.)

(α) Έστω $u = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\}$,
$s = \sup\{f(x) : x \in A\}$ και $t = \inf\{f(x) : x \in A\}$.

• Θα δείξουμε πρώτα ότι $u \le s - t$.
Έστω $x, y \in A$. Τότε $f(x) \le s$ και $f(y) \ge t$. Άρα
$\begin{cases} f(x) \le s \\ -f(y) \le -t \end{cases}$, από όπου παίρνουμε $f(x) - f(y) \le s - t$.
Αφού τα $x, y \in A$ ήταν τυχόντα, έχουμε $f(x) - f(y) \le s - t$, για κάθε $x, y \in A$, δηλαδή ο $s - t$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) - f(y) : x, y \in A\}$, οπότε $\boxed{u \le s - t}$ (1)

• Δείχνουμε τώρα ότι $s - t \le u$.
Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, είναι $s - t - \varepsilon < u$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s = \sup\{f(x) : x \in A\}$, υπάρχει $x_1 \in A$ με $s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_1)$.
Αφού $t = \inf\{f(x) : x \in A\}$, υπάρχει $y_1 \in A$ με $f(y_1) < t + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -t - \frac{\varepsilon}{2} < -f(y_1)$.
Άρα $(s - t) - \varepsilon < f(x_1) - f(y_1) \le u$.
Συμπεραίνουμε ότι $\boxed{s - t \le u}$ (2)
Από τις (1) και (2) παίρνουμε $u = s - t$.

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(i) Θα δείξουμε ότι και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Riemann, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ με

$$U(|f|,P)-L(|f|,P)<\varepsilon.$$

Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ με

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\boxed{U(|f|,P)-L(|f|,P)\leq U(f,P)-L(f,P)}$$

Η απόδειξη βασίζεται στα εξής:

(1) $|f(x)|-|f(y)|\leq|f(x)-f(y)|$ (ιδιότητες απόλυτης τιμής)

(2) $\sup\{|f(x)-f(y)|:x,y\in I\}=\sup\{f(x)-f(y):x,y\in I\}$

και (3) $\sup\{f(x)-f(y):x,y\in I\}=\sup\{f(x):x\in I\}-\inf\{f(x):x\in I\}$

για οποιοδήποτε $I\subset[a,b]$ (Ερώτημα (α)).

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$.

Έστω $i=0,1,2,\dots,n-1$. Είναι

$$M_i(|f|)-m_i(|f|)=\sup\{|f(x)|:x\in[x_i,x_{i+1}]\}-\inf\{|f(x)|:x\in[x_i,x_{i+1}]\}$$

$$\overset{(3)}{=}\sup\{|f(x)|-|f(y)|:x,y\in[x_i,x_{i+1}]\}\overset{(1)}{\leq}\sup\{|f(x)-f(y)|:x,y\in[x_i,x_{i+1}]\}$$

$$\overset{(2)}{=}\sup\{f(x)-f(y):x,y\in[x_i,x_{i+1}]\}\overset{(3)}{=}\sup\{f(x):x\in[x_i,x_{i+1}]\}-\inf\{f(x):x\in[x_i,x_{i+1}]\}$$

Άρα $M_i(|f|)-m_i(|f|)\leq M_i(f)-m_i(f)$ $\forall i=0,1,\dots,n-1$.

Συμπεραίνουμε ότι:

$$\sum_{i=0}^{n-1}[M_i(|f|)-m_i(|f|)](x_{i+1}-x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1}[M_i(f)-m_i(f)](x_{i+1}-x_i),$$

δηλαδή

$$\mathcal{U}(|f|,P)-L(|f|,P) \leq \mathcal{U}(f,P)-L(f,P)$$

και τελικά $\quad \mathcal{U}(|f|,P)-L(|f|,P) < \varepsilon.$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) Θα δείξουμε τώρα ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.
Κατ' αρχάς η f ως ολοκληρώσιμη είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε να ισχύει:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b].$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$.
Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$, για την οποία ισχύει:

$$\mathcal{U}(f,P)-L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\boxed{\mathcal{U}(f^2,P)-L(f^2,P) \leq 2M\cdot[\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)]}$$

Βασιζόμενοι στη σχέση

$$|f^2(x)-f^2(y)| = |f(x)-f(y)|\cdot|f(x)+f(y)|,$$

η οποία δίνει

$$|f^2(x)-f^2(y)| \leq |f(x)-f(y)|\cdot[|f(x)|+|f(y)|]$$

και τελικά $\quad |f^2(x)-f^2(y)| \leq |f(x)-f(y)|\cdot 2M,$

έχουμε:

Έστω $\quad P=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}.$

Έστω $\quad i=0,1,\ldots,n-1.$

Είναι, ανάλογα με το (ii):

$$M_i(f^2) - m_i(f^2) = \sup\{f^2(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f^2(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

$$= \sup\{|f^2(x) - f^2(y)| : x, y \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

$$\leq 2M \cdot \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

$$= 2M \cdot [\sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}]$$

$$= 2M \cdot (M_i(f) - m_i(f))$$

Συμπεραίνουμε, όπως πριν, ότι

$$U(f^2, P) - L(f^2, P) \leq 2M \cdot (U(f,P) - L(f,P))$$

και τελικά

$$U(f^2, P) - L(f^2, P) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, από το κριτήριο του Riemann έπεται ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) Η υπόθεση ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη δεν συνεπάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα:

Για τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ -1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$

έχουμε ότι η $|f| \equiv 1$ είναι ολοκληρώσιμη.

Είναι όμως εύκολο να δούμε ότι $L(f,P) = -1$, ενώ $U(f,P) = 1$, για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(δ) Εύκολα ελέγχουμε ότι, για οποιουσδήποτε αριθμούς γ, δ, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\max\{\gamma, \delta\} = \frac{1}{2}\left[\gamma + \delta + |\gamma - \delta|\right]$$

και $$\min\{\gamma, \delta\} = \frac{1}{2}\left[\gamma + \delta - |\gamma - \delta|\right].$$

Άρα, για τις συναρτήσεις φ, ψ, έχουμε

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right]$$

και

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right].$$

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες του ολοκληρώματος και το ερώτημα (β)(i) παίρνουμε τώρα ότι, αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε και οι

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(f + g + |f - g|\right) \quad \text{και}$$

$$\psi = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right)$$

είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν βαθμωτές (κλιμακωτές) συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon$ με $g_\varepsilon \le f \le h_\varepsilon$ και τέτοιες ώστε

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon .$$

Ξεκινάμε εισάγοντας κάποιον συμβολισμό και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης.

Υποθέτουμε ότι η $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μία βαθμωτή συνάρτηση της ακόλουθης μορφής:

Υπάρχει μία διαμέριση

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \}$$

του $[a,b]$ και σταθερές $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ ώστε:

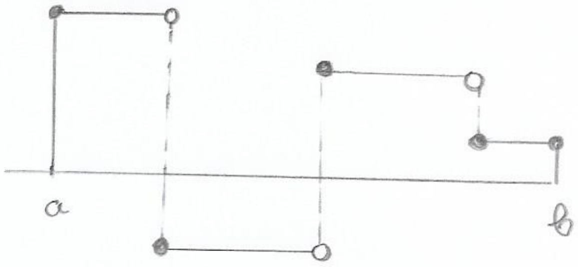
Για κάθε $i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\varphi(x) = c_i, \quad \text{για κάθε } x \in [t_i, t_{i+1})$$

και $\varphi(b) = c_{n-1}$.

Τότε η φ είναι ολοκληρώσιμη και

$$(*) \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$$



Ορισμός - Συμβολισμός: Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με χ_A τη «χαρακτηριστική συνάρτηση» του συνόλου A, δηλαδή

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Με αυτόν το συμβολισμό, η βαθμωτή συνάρτηση φ γράφεται ως:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n-2} c_i \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})} + c_{n-1} \chi_{[t_{n-1}, t_n]}$$

- Υποθέτουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Σύμφωνα με το κριτήριο του Riemann, υπάρχει διαμέριση

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \}$$

του $[a,b]$ με

$$\mathcal{U}(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Θέτουμε

$$h_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-2} M_i \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})} + M_{n-1} \cdot \chi_{[t_{n-1}, t_n]}$$

και

$$g_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-2} m_i \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})} + m_{n-1} \cdot \chi_{[t_{n-1}, t_n]}.$$

Παρατηρήστε ότι ισχύει

$$g_\varepsilon \le f \le h_\varepsilon$$

και ότι, σύμφωνα με την $(*)$, είναι

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \,(t_{i+1} - t_i) = \mathcal{U}(f,P)$$

και

$$\int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \,(t_{i+1} - t_i) = L(f,P).$$

Έπεται ότι

$$0 \le \int_a^b h_\varepsilon(x)\,dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx < \varepsilon.$$

- Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν βαθμωτές συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon$ με $g_\varepsilon \le f \le h_\varepsilon$ και τέτοιες ώστε

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)\,dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx < \varepsilon.$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί να βρούμε διαμέριση P_0 του $[a,b]$ με

$$U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon.$$

Από την υπόθεση υπάρχουν βαθμωτές συναρτήσεις g, h με $g \le f \le h$ και

$$(**) \quad \int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ με

$$\int_a^b g(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} < L(g,P_1) \quad (1)$$

Επίσης, αφού $g \le f$, ισχύει

$$L(g,P_1) \le L(f,P_1) \quad (2)$$

Όμοια, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ με

$$U(h,P_2) < \int_a^b h(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad (3)$$

και, αφού $f \le h$, ισχύει

$$U(f,P_2) \le U(h,P_2) \quad (4)$$

Θέτοντας $P_0 = P_1 \cup P_2$, από τις (1) και (2), έχουμε

$\int_a^b g(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} < L(f,P_1) \le L(f,P_0)$ και από τις (3), (4):

$$U(f,P_0) \le U(f,P_2) < \int_a^b h(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{4} \underset{(**)}{<} \int_a^b g(x)\,dx + \frac{3\varepsilon}{4}$$

Άρα $\int_a^b g(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} < L(f,P_0) \le U(f,P_0) < \int_a^b g(x)\,dx + \frac{3\varepsilon}{4}$,

δηλαδή $U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon$.

6. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann, αποδείξτε ότι, αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

(β) Εξετάστε αν το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) είναι σωστό στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη, αλλά όχι κατ' ανάγκη συνεχής συνάρτηση.

(α) Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ως ειδική περίπτωση του γενικότερου Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θεώρημα 5.1.1) Επίσης, ένα λίγο ισχυρότερο αποτέλεσμα ($\xi \in (a,b)$) μπορεί να αποδειχθεί ως συνέπεια του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού (Πόρισμα 5.2.5).

Εδώ δίνουμε μία άμεση απόδειξή του, η οποία χρησιμοποιεί μόνο τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann:

Αφού η f είναι συνεχής είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$.

Έστω $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$
και $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Έστω $x_1 \in [a,b]$ με $M = f(x_1)$ και $x_2 \in [a,b]$ με $m = f(x_2)$.

Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος προκύπτει ότι, αφού

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b],$$

ισχύει $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$, δηλαδή

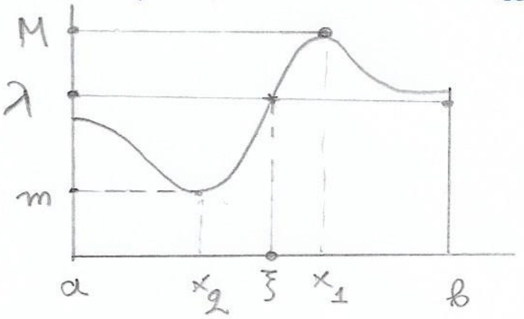
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

και διαιρώντας με $b-a$

$$f(x_2) = m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M = f(x_1)$$

Αφού η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι η εικόνα του $[a,b]$ μέσω της f είναι το διάστημα $[m, M]$.
Αφού ο αριθμός $\lambda = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ ανήκει στο διάστημα $[m,M]$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με $f(\xi) = \lambda$, δηλαδή

$$f(\xi)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



(Ο αριθμός $\lambda = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ λέγεται μέση τιμή της f στο $[a,b]$).

(β) Στο ερώτημα (α), η συνέχεια της f μας έδωσε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του ξ.
Αν η f δεν είναι συνεχής, το συμπέρασμα μπορεί να μην ισχύει.
Παράδειγμα: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Τότε $\int_0^1 f(x)dx = 0$, αλλά δεν υπάρχει $\xi \in [0,1]$ με $f(\xi) = 0$.

7. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μία ακολουθία (a_n) ως εξής: $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = f(0)$.

Η f, ως συνεχής σε κλειστό διάστημα, είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ με $|f(x)| \le M$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ «αρκετά μεγάλο» είναι $|a_n - f(0)| < \varepsilon$.

Έχουμε

$$|a_n - f(0)| = \left|\int_0^1 f(x^n)\,dx - f(0)\right| = \left|\int_0^1 (f(x^n) - f(0))\,dx\right|,$$

οπότε

$$|a_n - f(0)| \le \int_0^1 |f(x^n) - f(0)|\,dx$$

$$\Rightarrow (1)\quad |a_n - f(0)| \le \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M}} |f(x^n) - f(0)|\,dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(x^n) - f(0)|\,dx.$$

(υποθέτουμε ότι το ε είναι αρκετά μικρό ώστε $\frac{\varepsilon}{4M} < 1$).

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1) έχουμε:

$$(2)\quad \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(x^n) - f(0)|\,dx \le \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M}}^1 \left(|f(x^n)| + |f(0)|\right)dx \le \frac{\varepsilon}{4M}\, 2M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την άλλη μεριά, αφού η f είναι συνεχής στο 0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $|t| < \delta$, τότε $|f(t) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Επιπλέον, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\varepsilon}{4M}\right)^n = 0,$$

άρα υπάρχει n_0 ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, να ισχύει

$$0 < \left(1-\frac{\varepsilon}{4M}\right)^n < \delta.$$

Έστω $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $x \in [0, 1-\frac{\varepsilon}{4M}]$ είναι

$$0 \leq x^n \leq \left(1-\frac{\varepsilon}{4M}\right)^n < \delta, \quad \text{άρα}$$

$$|f(x^n) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$, είναι

$$(3) \quad \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M}} |f(x^n) - f(0)|\,dx \leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M}} \frac{\varepsilon}{2}\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Από τις (1), (2) και (3) έπεται, ότι, για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει

$$|a_n - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = f(0)$.

8. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ισχύει

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλη διαμέριση του διαστήματος $[\frac{1}{n}, 1]$.

(β) Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας, αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

Έστω $n \geq 2$.

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη στο $[\frac{1}{n}, 1]$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{1}{n}, 1]$ (πλάτους $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$) σε $n-1$ διαστήματα ίσου πλάτους $\frac{1}{n}$, δηλαδή θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{ \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1 \right\} \text{ του } [\tfrac{1}{n}, 1].$$

Υπολογίζουμε το κάτω άθροισμα $L(f, P_n)$.

Αφού η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα, η ελάχιστη τιμή της σε κάθε διάστημα $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k = 1, \ldots, n-1$, είναι η $f(\frac{k+1}{n}) = \frac{n}{k+1}$.

Έτσι

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \ldots + \frac{n}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Αφού $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx \geq L(f, P_n)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\, dx \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

(β)

Αφού η αρμονική σειρά αποκλίνει, προφανώς και η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, δηλαδή αν

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, τότε $S_n \to +\infty$

Συμπεραίνουμε από το (α) ότι και η ακολουθία $\delta_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Άρα, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M)$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx > M.$$

Έπεται ότι για κάθε t με $0 < t < \frac{1}{n_0}$ ισχύει

$$\int_{t}^{1} \frac{1}{x}\, dx > \int_{\frac{1}{n_0}}^{1} \frac{1}{x}\, dx > M.$$

Άρα $$\lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

9*. Δίνεται διάστημα $[a,b]$ και συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\varepsilon>0$, το σύνολο

$$A_\varepsilon=\{x\in[a,b]:|f(x)|\geq\varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Έστω

$$A=\{x\in[a,b]:f(x)\neq 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι το σύνολο A είναι το πολύ αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο) και ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε $x\notin A$ και ασυνεχής σε κάθε $x\in A$.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b f(x)dx=0$.

(α) (i) Εστω $A=\{x\in[a,b]: f(x)\neq 0\}$

Ισχυρισμός:

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{\frac{1}{n}}.$$

Πράγματι· Είναι φανερό ότι $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_{\frac{1}{n}}\subseteq A$.

Αν τώρα $x\in A$, τότε $|f(x)|>0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ με $n_0>\frac{1}{|f(x)|}$, δηλαδή $|f(x)|>\frac{1}{n_0}$, οπότε $x\in A_{n_0}$.

Επεται από τον Ισχυρισμό ότι το A είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο, ως ένωση αριθμήσιμου πλήθους πεπερασμένων συνόλων.

(ii) Δειχνουμε τώρα ότι η f είναι φραγμένη.

Από την υπόθεση, το

$$A_1=\{x\in[a,b]:|f(x)|\geq 1\}$$

είναι πεπερασμένο. Αν $A_1=\emptyset$, τότε $|f(x)|<1$, για κάθε $x\in[a,b]$.

Εστω ότι, για κάποιο $k\in\mathbb{N}$ είναι

$$A_1=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}.$$

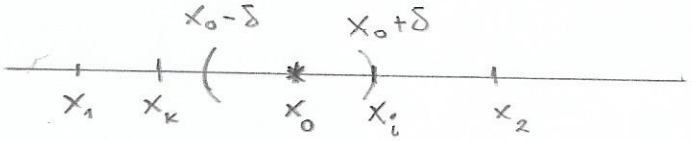
Θέτουμε $M=\max\{|f(x_1)|,|f(x_2)|,\dots,|f(x_k)|\}\geq 1$.

Τότε $|f(x)|\leq M$, για κάθε $x\in[a,b]$.

(β) • Έστω $x_0 \notin A$, δηλαδή $f(x_0)=0$.
Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.
Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ ώστε αν $x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ τότε $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|<\varepsilon$.
Το σύνολο

$$A_\varepsilon=\{x\in[a,b] : |f(x)|\geq\varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο – και προφανώς $x_0\notin A_\varepsilon$.
Αν $A_\varepsilon=\emptyset$, τότε $|f(x)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in[a,b]$ και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.
Έστω $A_\varepsilon=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$.
Θέτουμε $\delta=\min\{|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\dots,|x_k-x_0|\}>0$.
Αν $x\in[a,b]$ με $|x-x_0|<\delta$, τότε $x\notin A_\varepsilon$.
Άρα $|f(x)|<\varepsilon$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.



• Έστω τώρα $y_0\in A$, δηλαδή $|f(y_0)|>0$.
Θα δείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο y_0. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, αφού το σύνολο $A=\{x\in[a,b]: f(x)\neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο, κάθε διάστημα $I\subset[a,b]$ περιέχει σημεία x με $x\notin A$ (το πλήθος των σημείων ενός διαστήματος είναι υπεραριθμήσιμο).
Θέτουμε τώρα $\varepsilon=\frac{|f(y_0)|}{2}$. Τότε, για κάθε $\delta>0$, στο διάστημα $(y_0-\delta,y_0+\delta)\cap[a,b]$ υπάρχει x με $x\notin A$ δηλαδή x με $f(x)=0$.
Έπεται ότι $|f(x)-f(y_0)|=|f(y_0)|>\varepsilon$.
Αυτό αποδεικνύει ότι η f δεν είναι συνεχής στο y_0.

(γ) Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, αφού το A είναι αριθμήσιμο, όπως είδαμε και στο (β), κάθε διάστημα $I \subseteq [a,b]$ περιέχει σημεία x με $x \notin A$, δηλαδή σημεία x με $f(x) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, ισχύει

$$(*) \qquad L(f,P) \le 0 \le U(f,P).$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$.
Θα βρούμε διαμέριση P_0 του $[a,b]$ για την οποία ισχύει

$$-\frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_0) \le 0 \le U(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Έστω $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.

Το σύνολο $A_\sigma = \left\{ x \in [a,b] : |f(x)| \ge \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \right\}$

είναι πεπερασμένο, έστω ότι έχει k στοιχεία:

$$A_\sigma = \{ x_1, x_2, \dots, x_k \}.$$

Από το (α) η f είναι φραγμένη, έστω ότι $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ με $\boxed{N > \dfrac{8k\cdot(b-a)\cdot M}{\varepsilon}}$ (1)

Θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_0 = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \}$$

με $t_{i+1} - t_i = \dfrac{b-a}{N}$, για κάθε $i = 0, 1, \dots, N-1$,

η οποία χωρίζει το $b-a$ σε N ίσα τμήματα πλάτους $\dfrac{b-a}{N}$.

Παρατηρούμε ότι καθένα από τα k στοιχεία του A_σ ανήκει σε 2 το πολύ υποδιαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$.

Άρα, αν

$$U(f, P_0) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i (t_{i+1} - t_i)$$

και $\sum_{i \in \Lambda} M_i (t_{i+1} - t_i)$ είναι το άθροισμα των όρων που αντιστοιχούν σε διαστήματα που έχουν στοιχεία του A_σ, τότε το Λ έχει το πολύ $2k$ στοιχεία και άρα

$$\sum_{i \in \Lambda} M_i (t_{i+1} - t_i) \leq 2k \cdot \frac{b-a}{N} \cdot M < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{από την (1)}.$$

Από την άλλη μεριά, για τα i με $i \notin \Lambda$ είναι $M_i \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ και άρα

$$\sum_{i \notin \Lambda} M_i (t_{i+1} - t_i) \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{i \notin \Lambda} (t_{i+1} - t_i) \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Έπεται ότι

$$U(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, P_0).$$

Άρα $U(f, P_0) - L(f, P_0) < \varepsilon$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, από το Κριτήριο του Riemann παίρνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος η $(*)$ δίνει ότι $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.