Ομοιόμορφη συνέχεια: Ανακεφαλαίωση των κριτηρίων - Ασκήσεις

Α. Κριτήρια για ομοιόμορφη συνέχεια

I. Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε φραγμένο διάστημα

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (Θεώρημα 3.3.1).

2. Μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (a, b) (ή $(a, b]$ ή $[a, b)$) είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα όρια $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to b^-} f(x)$ (Θεώρημα 3.3.3).

II. Συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ημιευθεία ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$

1. Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής (Πρόταση 3.1.3). Ειδικότερα, αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι φραγμένη, τότε η f είναι Lipschitz συνεχής και κατά συνέπεια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Πρόταση 3.1.4).

2. Αν η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (Άσκηση 9 Σημειώσεων). Το αντίστοιχο ισχύει για συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα της μορφής $(-\infty, a]$.

3. Το άθροισμα δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Άσκηση 7α Σημειώσεων).

4. Το γινόμενο δύο **φραγμένων** και ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Άσκηση 7β Σημειώσεων).

5. Η σύνθεση δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (Άσκηση 6 Σημειώσεων).

6. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του I. Αν η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο $A = \{x \in I : x \leq a\}$ και ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο $B = \{x \in I : x \geq a\}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I (Άσκηση 4 σε αυτό το Φυλλάδιο). Ειδικότερα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, a]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Συνδυάζοντας αυτό με το 2 παραπάνω παίρνουμε ότι: Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τα όρια $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Οι Προτάσεις II. 1-5 δίνουν ικανές, αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες για την ομοιόμορφη συνέχεια, επομένως εφαρμόζονται στην περίπτωση που θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μία δεδομένη συνάρτηση **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής, χρησιμοποιούμε συνήθως ένα από τα ακόλουθα:

7. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$ (Θεώρημα 3.2.1). Αυτό σημαίνει ότι, για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, αρκεί να βρούμε ένα ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, για το οποίο η ακολουθία των διαφορών $(f(x_n) - f(y_n))$ δεν τείνει στο 0.

8. Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα I, τότε υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$, για κάθε $x \in I$ (Άσκηση 10 Σημειώσεων).
Επομένως, αν αποδείξουμε ότι μία δεδομένη συνάρτηση f δεν κυριαρχείται από συνάρτηση της μορφής $y = A|x| + B$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε για παράδειγμα να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a$, με $a > 1$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0, +\infty)$.

9. Αν η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (Άσκηση 3 σε αυτό το Φυλλάδιο).
Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει όταν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$ ή όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι της μορφής $(-\infty, a]$.

Στις εξετάσεις μπορείτε να χρησιμοποιείτε οποιοδήποτε από τα παραπάνω κριτήρια όταν εξετάζετε μια συνάρτηση ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια. Θα πρέπει όμως να ξέρετε και τις αποδείξεις τους (εξαιρείται η απόδειξη του 8), γιατί και αυτές μπορεί να ζητηθούν.

B. Παραδείγματα για τη σύγκριση της ομοιόμορφης συνέχειας με τη Lipschitz συνέχεια

Όπως ξέρουμε, η Lipschitz συνέχεια συνεπάγεται την ομοιόμορφη συνέχεια, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Παρακάτω δίνουμε παραδείγματα συναρτήσεων -το πρώτο σε φραγμένο διάστημα, το δεύτερο σε μη φραγμένο διάστημα - που είναι ομοιόμορφα συνεχείς, αλλά δεν είναι Lipschitz συνεχείς.

Θυμηθείτε κατ΄ αρχάς ότι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η παράγωγός της είναι φραγμένη (Άσκηση 3 Σημειώσεων).

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά όχι Lipschitz συνεχής στο $[0, 1]$, αφού έχει μη φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1]$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά όχι Lipschitz συνεχής στο $[1, +\infty)$. Για την απόδειξη της ομοιόμορφης συνέχειας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο ΙΙ.2, αφού $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Το ότι δεν είναι Lipschitz συνεχής προκύπτει από το γεγονός ότι η παράγωγός της δεν είναι φραγμένη.

3. Το Θεώρημα του Rademacher, το οποίο μπορεί να δείτε σε ένα μάθημα Θεωρίας Μέτρου, λέει ότι κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε πολλά σημεία (η ακριβής διατύπωση είναι: "σχεδόν παντού παραγωγίσιμη"). Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, για παράδειγμα η συνάρτηση του Weierstrass στο $[0, 1]$, οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο.

Γ. Ασκήσεις

Βασικές ασκήσεις από τις Σημειώσεις: Ασκήσεις 2 - 22

1. Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(i) $f(x) = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(ii) $f(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = \log x, \quad x \in [1, +\infty)$

(iv) $f(x) = \log x, \quad x \in (0, +\infty)$

(v) $f(x) = \cos(e^x), \quad x \in \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

(vii) $f(x) = \sin(\sqrt{x}), \quad x \in [0, +\infty)$

2. Έστω $\alpha > 0$ και $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Μία συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση Lipschitz τάξης α, αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε να ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}, \quad \text{για κάθε } x, y \in I$$

(α) Δείξτε ότι, αν $\alpha > 1$, τότε οι μόνες συναρτήσεις Lipschitz τάξης α είναι οι σταθερές.

(β) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε κάθε συνάρτηση Lipschitz τάξης α είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}, x \in [0, +\infty)$ είναι Lipschitz τάξης α και, κατά συνέπεια, ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Ειδικότερα, παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[n]{x},\ x \geq 0$, είναι Lipschitz τάξης $\frac{1}{n}$ και άρα ομοιόμορφα συνεχής, ενώ δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (τάξης 1).

3. (α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι
(i) Για κάθε $\alpha > 1$, η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha},\ x \in [0, +\infty)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(ii) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
(iii) Η συνάρτηση $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (α) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του I. Έστω $A = \{x \in I : x \leq a\}$ και $B = \{x \in I : x \geq a\}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και ομοιόμορφα συνεχής στο B, δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1) \cup (1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0, 1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1, 2]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1)$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $(1, 2]$, αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της.