Συμπληρωματικές Ασκήσεις 7ου Κεφαλαίου

1. Για καθεμία από τις επόμενες δυναμοσειρές
   (α) βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και προσδιορίστε το σύνολο σύγκλισης
   (β) βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-R,R)$.

(i) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

(α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου για να βρούμε για ποιες τιμές του x συγκλίνει απολύτως η σειρά. Θέτοντας $b_n = (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, είναι

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$$

Βλέπουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0$, δηλαδή

$\lim \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 0 < 1$. Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, δηλαδή $R=+\infty$ και το σύνολο σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$.

(β) Αφού $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτοντας όπου x το $-x$, έχουμε

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

(Παρατήρηση: Από το (β) προκύπτει έμμεσα ότι $R=+\infty$ και η απόδειξη του (α) θα μπορούσε να παραληφθεί.)

Ασκηση 1 (συνέχεια)

(ii)

$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$

(a) Είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $-x^3$.
Γνωρίζουμε ότι συγκλίνει αν και μόνο αν $|-x^3| < 1$, δηλαδή $|x|<1$.
Άρα $R = 1$ και Σύνολο σύγκλισης $= (-1,1)$

(β) Από τον τύπο για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς είναι:

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1,1)$$

(iii)

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 4} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$$

(a) Για την ακτίνα σύγκλισης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}}} = 1.$$

Αν $x = -1$, παίρνουμε τη σειρά

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, η οποία συγκλίνει (είναι τηλεσκοπική ή μπορούμε να συγκρίνουμε με την $\beta_n = \frac{1}{n^2}$)

Αν $x = 1$, παίρνουμε $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$, της οποίας η σειρά των απολύτων είναι η προηγούμενη, άρα πάλι συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως.
Συμπεραίνουμε ότι: Σύνολο σύγκλισης $= [-1,1]$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(β)
Έστω $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 4} + \cdots$, $x \in [-1,1]$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών, για $x \in (-1,1)$ (στο ανοιχτό διάστημα), μπορούμε να παραγωγίσουμε την F παραγωγίζοντας τη δυναμοσειρά όρο προς όρο, δηλαδή

$$F'(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots , \quad x \in (-1,1).$$

Όμως η τελευταία δυναμοσειρά παριστάνει τη συνάρτηση $\ln(1+x)$, δηλαδή $F'(x) = \ln(1+x)$.
Συμπεραίνουμε ότι η F είναι η παράγουσα της $\ln(1+x)$ που ικανοποιεί την $F(0)=0$.
Άρα

$$F(x) = (1+x)\ln(1+x) - x , \quad x \in (-1,1)$$

(iv) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

οπότε
προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$
και τελικά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι έτσι προκύπτει απευθείας ότι $R = +\infty$.
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ονομάζεται υπερβολικό συνημίτονο και συμβολίζεται $\cosh x$.

2. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα.

Λύση.
Καθένα από τα αθροίσματα που δίνονται προκύπτει από μία δυναμοσειρά, αντικαθιστώντας το x με μία συγκεκριμένη τιμή.
Επομένως, για να τα υπολογίσουμε ακολουθούμε τα εξής βήματα:
1) Βρίσκουμε τη δυναμοσειρά.
2) Βρίσκουμε τη συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη δυναμοσειρά, όπως στην Άσκηση 1.
3) Αντικαθιστούμε την τιμή του x στον τύπο της συνάρτησης.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$.

Παρατηρούμε ότι προέρχεται από τη δυναμοσειρά

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ για $x = 2\pi$. Όμως

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

άρα, θέτοντας $x = 2\pi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!} = \cos(2\pi) = 1.$$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$. Από την Άσκηση 1 (iv),

έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και, για $x = 1$, παίρνουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}.$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

Προέρχεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$

(η οποία έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$) για $x=\frac{1}{2}$.

Εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 1(iii):

Αν

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \text{τότε}$$

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad \text{για} \quad x \in (-1,1).$$

Η τελευταία είναι γεωμετρική σειρά με λόγο x^2 και πρώτο όρο 1. Άρα

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right]$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

και τελικά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 3$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Προέρχεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, για $x = \frac{1}{2}$.

Η τελευταία δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και, γράφοντας $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$,

βλέπουμε ότι, για $x \in (-1, 1)$ είναι

$$F(x) = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

και τελικά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = F\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{3^n} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ προέρχεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

(με ακτίνα σύγκλισης $R = 1$).

Θέτουμε $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, παραγωγίζουμε και

συνεχίζουμε όπως στο (iii)

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(vi)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{2^n \cdot n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2e^{1/2}$$

Άσκηση 3.

Βρείτε τις παραγώγους κάθε τάξης στο 0 των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$.

(ii) $g(x) = x e^{x^2}$

Λύση

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Παραγώγισης δυναμοσειρών, από το οποίο προκύπτει ότι, αν μία συνάρτηση αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$, τότε η σειρά αυτή είναι η σειρά Taylor – με κέντρο το 0 – της συνάρτησης και, κατά συνέπεια, για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \text{δηλαδή} \quad f^{(k)}(0) = k!\, a_k,$$

όπου (a_k) η ακολουθία των συντελεστών της δυναμοσειράς.

Ασκηση 3 (συνέχεια)

(i) Είναι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x \neq 0$, παίρνουμε

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

Αφού $f(0) = 1$, η παραπάνω δυναμοσειρά παριστάνει τη συνάρτηση f για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα είναι η σειρά Taylor της f με κέντρο το 0.

Άρα, για τις παραγώγους $f^{(n)}(0)$ έχουμε:

Αν n περιττός, τότε $f^{(n)}(0) = 0$.

Αν $n = 2k$ (άρτιος), τότε

$$f^{(n)}(0) = f^{(2k)}(0) = (2k)! \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)}$$

και τελικά

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n/2} \frac{1}{n+1} \quad , \text{ για κάθε } n \text{ άρτιο}$$

(ii) Όμοια.

4. Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, για κάθε $x \in (-R, R)$.

Δείξτε ότι, αν η f είναι άρτια συνάρτηση, τότε $a_n = 0$, για κάθε n περιττό, ενώ αν η f είναι περιττή συνάρτηση, τότε $a_n = 0$, για κάθε n άρτιο. (Το αντίστροφο που επίσης ισχύει είναι φανερό.)

Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται στις δύο παρατηρήσεις που ακολουθούν:

Παρατήρηση 1η: Έστω g παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$. Αν η g είναι άρτια, τότε η g' είναι περιττή, ενώ, αν η g είναι περιττή συνάρτηση, τότε η g' είναι άρτια.

Πράγματι: Υποθέτουμε ότι η g είναι άρτια συνάρτηση. Έστω $x_0 \in (-R, R)$. Τότε

$$g'(-x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(-x_0+h) - g(-x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(-x_0-h) - g(-x_0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[- \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] = -g'(x_0)$$

Ανάλογη είναι η απόδειξη για την περίπτωση που η g είναι περιττή συνάρτηση.

Παρατήρηση 2η: Αν η συνάρτηση h είναι περιττή και συνεχής στο 0, τότε $h(0) = 0$.

Πράγματι: Είναι

$$h(0) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^+} h(-x) = \lim_{x \to 0^+} [-h(x)] = -\lim_{x \to 0^+} h(x) = -h(0)$$

Δηλαδή $h(0) = -h(0)$. Άρα $h(0) = 0$.

Με βάση την 1η Παρατήρηση και με επαγωγή παίρνουμε ότι:
Αν η f είναι άρτια τότε για κάθε n περιττό η $f^{(n)}$ είναι περιττή συνάρτηση.
Έπεται ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε n περιττό, δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε n περιττό.
Ανάλογα, αν η f είναι περιττή συνάρτηση, θα πάρουμε $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε n άρτιο, δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε n άρτιο.

5. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ισούται με 1.

<u>Απόδειξη</u>
Από την υπόθεση ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει παίρνουμε ότι
$1 \notin (-R, R)$, άρα $R \leq 1$.

Όμως η (a_n) είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Άρα $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim \sqrt[n]{M} = 1$.

Αφού $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ παίρνουμε $R \geq 1$.

Συμπεραίνουμε ότι $R = 1$.

6. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ισούται με 1.

Απόδειξη

Ξέρουμε ότι: Για κάθε $x \in (-R, R)$ η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως.

Αφού, για $x = 1$, η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, θα ισχύει $1 \notin (-R, R)$, δηλαδή $R \leq 1$.

Από την άλλη μεριά, αν $|x| > R$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει. Αφού, για $x = 1$, η σειρά συγκλίνει, θα ισχύει $1 \leq R$.

Συμπεραίνουμε ότι $R = 1$.

Γενικότερα ισχύει ότι οι μόνες τιμές του x για τις οποίες μία δυναμοσειρά μπορεί να συγκλίνει υπό συνθήκη (δηλαδή να συγκλίνει, αλλά να μην συγκλίνει απολύτως) είναι τα άκρα $-R$, R του διαστήματος σύγκλισης.

7. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M>0$ ώστε να ισχύει $|f^{(k)}(x)|\le M$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Taylor της f με κέντρο το 0 συγκλίνει στην f για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ακολουθία των υπολοίπων Taylor $(R_n(x))_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο 0.

Χρησιμοποιώντας τη μορφή του Lagrange για το $R_n(x)$, έχουμε:

Εστω $x\in\mathbb{R}$. Υπάρχει ξ μεταξύ των 0 και x ώστε:

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Με το κριτήριο του λόγου, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$ άρα και

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$