Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Χειμερινό εξάμηνο 2021-22
1η Σειρά Ασκήσεων - Ακολουθίες

1. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\limsup a_n = 0$.

(β) Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\limsup a_n = 0 \iff \lim a_n = 0 \ .$$

2. Δίνεται φραγμένη ακολουθία (a_n) και έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι ισχύει $\limsup a_n \leqslant s$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) για την οποία ισχύει $\limsup a_n < s$.

(γ) Δείξτε ότι, αν ισχύει $a_n \neq s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\limsup a_n = s$.

3. Δίνονται οι ακουλουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ και $b_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών $(a_n), (b_n)$ και $(a_n + b_n)$ και παρατηρήστε ότι

$$\liminf a_n + \liminf b_n < \liminf(a_n + b_n) < \limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n \ .$$

4. Δίνεται ακολουθία (a_n) και $a \in \mathbb{R}$. Καθεμιά από τις ιδιότητες α, β, γ, δ, ε είναι ισοδύναμη με κάποια από τις ιδιότητες i, ii, iii, iv. Κάντε την αντιστοίχιση αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(γ) Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(δ) Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < a - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(ε) Για κάθε $\varepsilon > 0$, στο διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ βρίσκονται όλοι τελικά οι όροι της (a_n).

και

(i) $\lim a_n = a$, (ii) $\liminf a_n \geq a$, (iii) $\limsup a_n \leq a$, (iv) το a είναι οριακό σημείο της (a_n).

5. Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$, δείξτε ότι $a_n \to a$.

6. (α) Αν $a_n \to 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $2^n a_{k_n} \to 0$.

(β) Αν $a_n \to 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ να συγκλίνει.

7. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0 \ ,$$

αλλά η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy .