Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

3η Σειρά Ασκήσεων - Ομοιόμορφη Συνέχεια

1. Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(i) $f(x) = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(ii) $f(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = \log x, \quad x \in [1, +\infty)$

(iv) $f(x) = \log x, \quad x \in (0, +\infty)$

(v) $f(x) = \cos(e^x), \quad x \in \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

(vii) $f(x) = \sin(\sqrt{x}), \quad x \in [0, +\infty)$

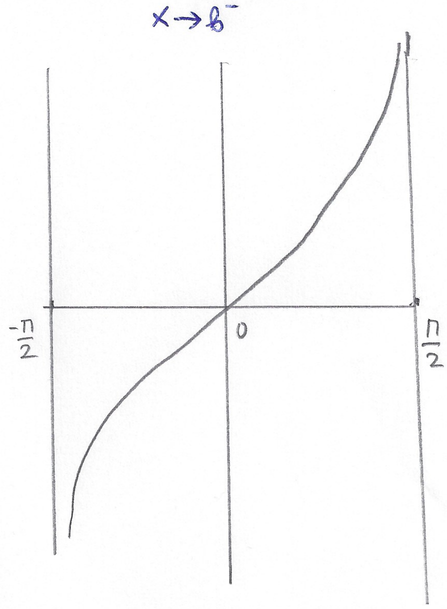
(i) $f(x) = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.3, μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα ανοιχτό φραγμένο διάστημα (a, b) είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα όρια $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Εδώ έχουμε

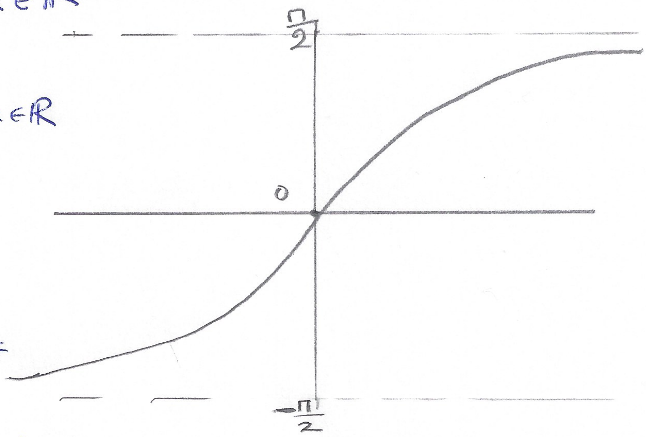
$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής



(ii)

$f(x) = \arctan x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$



Είναι $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad , x \in \mathbb{R}$

Αφού
$0 < f'(x) \leq 1$,
δηλαδή η f' είναι φραγμένη, συμπεραίνουμε ότι η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και ομοιόμορφα συνεχής.

Άλλος τρόπος:
Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ και η f είναι συνεχής, σύμφωνα με την Άσκηση 9(Σ), η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Όμοια, αφού $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, προκύπτει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$.

Τέλος, όπως θα δούμε και στην Άσκηση 7α (Φ) αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(iii) $f(x) = \log x \quad , \quad x \in [1, +\infty)$

Είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ και ισχύει

$0 < f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Αφού η f' είναι φραγμένη, η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$.

(iv) $f(x) = \log x \quad , \quad x \in (0, +\infty)$.

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$.

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty$.

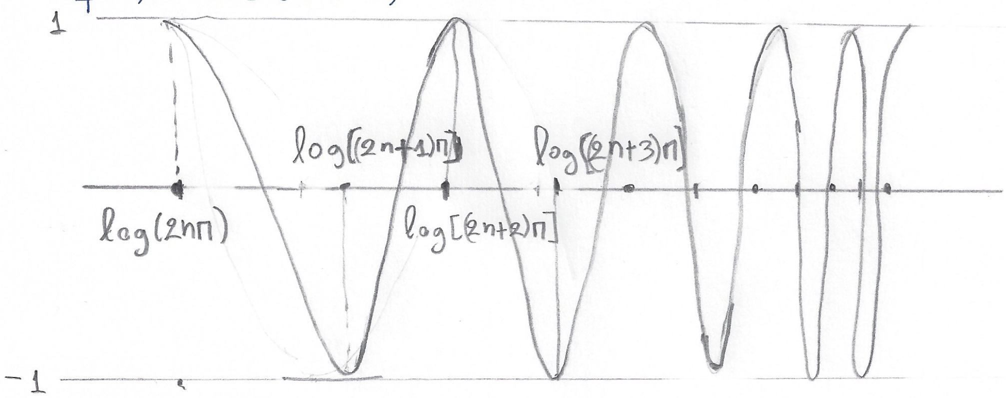
Από το Θεώρημα 3.3.3 έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$. Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $B \subseteq A$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B.

<u>Άλλος τρόπος</u>: Με ακολουθίες. Παρατηρούμε ότι για τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{e^n}$, $y_n = \frac{1}{e^{2n}}$, ισχύει $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$, αλλά $f(x_n) - f(y_n) = n \to +\infty$

Από το Θεώρημα 3.2.1, έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

(v) $f(x) = \cos(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$



Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, χρησιμοποιώντας κατάλληλες ακολουθίες.

Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n) (y_n) με

$$x_n = \log(2n\pi) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_n = \log((2n+1)\pi), \quad n \in \mathbb{N} .$$

Τότε $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$, $f(y_n) = \cos(2n\pi+\pi) = -1$, δηλαδή $f(x_n) - f(y_n) = 2$, ενώ

$$|x_n - y_n| = |\log(2n\pi) - \log((2n+1)\pi)| = \log\frac{2n+1}{2n}$$
$$= \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \log 1 = 0 .$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, αλλά

$f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$, συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(vi) $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι
(α) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$
και
(β) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$

(*) Από τα (α) και (β) έπεται – όπως θα δούμε και στην Άσκηση 7α (Φ) – ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Απόδειξη του (α): Η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.3. αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Πράγματι· από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x \cdot \sin\frac{1}{x}) = 0$ (αφού $-|x| \le x \cdot \sin\frac{1}{x} \le |x|$).
Συμπεραίνουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Από την Άσκηση 9 (Σ), παίρνουμε ότι, αφού η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$. Σύμφωνα με την (*), αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(vii) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, $x \in [0, +\infty)$.

Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής γενικότερο αποτέλεσμα:

Έστω $I, \Delta \subseteq \mathbb{R}$ διαστήματα, $f: I \to \mathbb{R}$ και $g: \Delta \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με την ιδιότητα $f(I) \subseteq \Delta$.
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε και η συνάρτηση $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Δ, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

(1) Αν $\zeta, \xi \in \Delta$ και $|\zeta - \xi| < \delta$, τότε $|g(\zeta) - g(\xi)| < \varepsilon$.

Αφού η $f: I \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, για το παραπάνω $\delta > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε:

Αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_1$, τότε $|f(x) - f(y)| < \delta$.

Συνδυάζοντας αυτό με την (1), βλέπουμε ότι:

Αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_1$, τότε $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$.
Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό αποδεικνύει ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Αν θεωρήσουμε τώρα την $h: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \sqrt{x}$ και την $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sin x$, έχουμε ότι η h είναι ομοιόμορφα συνεχής (έχει γίνει στην τάξη - δείτε και Άσκηση 2(φ)) και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής (έχει φραγμένη παράγωγο), άρα και η $f = g \circ h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Έστω $\alpha > 0$ και $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Μία συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση Lipschitz τάξης α, αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε να ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha, \quad \text{για κάθε } x, y \in I$$

(α) Δείξτε ότι, αν $\alpha > 1$, τότε οι μόνες συναρτήσεις Lipschitz τάξης α είναι οι σταθερές.

(β) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε κάθε συνάρτηση Lipschitz τάξης α είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha, x \in [0, +\infty)$ είναι Lipschitz τάξης α και, κατά συνέπεια, ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Ειδικότερα, παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, είναι Lipschitz τάξης $\frac{1}{n}$ και άρα ομοιόμορφα συνεχής, ενώ δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (τάξης 1).

(α) Έστω $\alpha > 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$, ώστε, για τη συνάρτηση f να ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha, \text{ για κάθε } x, y \in I.$$

Θα δείξουμε ότι τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in I$. Αφού το I είναι διάστημα, συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή στο I.

Απόδειξη της $f' = 0$.

Σταθεροποιούμε ένα $x \in I$. Για κάθε $y \in I$ με $y \neq x$, ισχύει

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} \leq K|y-x|^{\alpha-1}$$

άρα

$$-K|y-x|^{\alpha-1} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq K|y-x|^{\alpha-1}$$

Αφού $\alpha - 1 > 0$, έχουμε ότι $\lim_{y \to x} |y-x|^{\alpha-1} = 0$ και από το Κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$, δηλαδή $f'(x) = 0$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 2 (β)

Υποθέτουμε τώρα ότι $0 < \alpha \le 1$ και ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha, \text{ για κάθε } x, y \in I$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{1/\alpha} > 0$.

Έχουμε:

Αν $x, y \in I$ με $|x-y| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \le K\,|x-y|^\alpha < K \cdot \delta^\alpha = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

δηλαδή $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Έστω α με $0 < \alpha \le 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0, +\infty)$.
Θα δείξουμε ότι, για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$ ισχύει

$$|x^\alpha - y^\alpha| \le |x-y|^\alpha.$$

Παρατηρούμε ότι: (i) Αν $\alpha = 1$, η ζητούμενη ανισότητα ισχύει προφανώς ως ισότητα.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \alpha < 1$.

(ii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x > y$, οπότε η ζητούμενη γίνεται

$$x^\alpha - y^\alpha \le (x-y)^\alpha \quad \text{για κάθε } x \geq y \geq 0.$$

(iii) Αν $y = 0$, η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς ως ισότητα.

Σταθεροποιούμε λοιπόν $y>0$ και
Ορίζουμε τη συνάρτηση $g:[y,+\infty)\to\mathbb{R}$
με $g(x) = x^{\alpha}-y^{\alpha}-(x-y)^{\alpha}$.
Είναι $g(y)=0$ και η g είναι συνεχής
στο $[y,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(y,+\infty)$.
Θα δείξουμε ότι η g είναι φθίνουσα.
Πράγματι· Ισχύει, για $x>y$:

$$g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha(x-y)^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \alpha\left[\frac{1}{x^{1-\alpha}} - \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}\right]$$

Είναι $1-\alpha>0$ και $x>x-y>0$, άρα
$x^{1-\alpha} > (x-y)^{1-\alpha}$, οπότε $\frac{1}{x^{1-\alpha}} < \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}$ και $\alpha>0$,
άρα $g'(x)<0$.
Έπεται ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο
$[y,+\infty)$, οπότε $g(x)<g(y)=0$, για
κάθε $x>y$ και τελικά

$$x^{\alpha}-y^{\alpha} \leq (x-y)^{\alpha}$$

για κάθε $x\geq y\geq 0$.

Συμπεραίνουμε ότι αν $0<\alpha\leq 1$, η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$
είναι Lipschitz τάξης α στο $[0,+\infty)$
και άρα, σύμφωνα με το (Β), ομοιόμορφα
συνεχής.

Άσκηση 2(δ)

Έστω $n \geq 2$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$.

Είναι $f(x) = x^{1/n}$, με $0 < \frac{1}{n} < 1$, οπότε από το (γ) παίρνουμε ότι η f είναι συνάρτηση Lipschitz τάξης $\frac{1}{n}$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής.

Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι Lipschitz τάξης 1, υποθέτουμε ότι είναι και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω ότι υπάρχει $L>0$, ώστε, για κάθε $x, y \geq 0$ να ισχύει

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq L\,|x-y|.$$

Τότε, για $y=0$, θα παίρναμε:

Για κάθε $x>0$:

$$\sqrt[n]{x} \leq L\cdot x \quad , \text{δηλαδή} \quad \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} \leq L, \text{ για κάθε } x>0.$$

Όμως, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = +\infty$. Άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι Lipschitz τάξης 1.

<u>Άλλος τρόπος:</u> Δείχνουμε ότι η f δεν έχει φραγμένη παράγωγο, οπότε, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3 (Σ) προκύπτει ότι η f δεν είναι Lipschitz τάξης 1.

3. (α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι
(i) Για κάθε $\alpha > 1$, η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $x \in [0, +\infty)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(ii) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
(iii) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(α) Έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε, για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε, για κάθε $x, y \in [a, +\infty)$ με $|x-y| < \delta_1$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < 1$.

Ειδικότερα, θέτοντας $\delta = \frac{\delta_1}{2}$, θα έχουμε: Για κάθε $x \in [a, +\infty)$, $|(x+\delta) - x| = \delta < \delta_1$,

άρα $|f(x+\delta) - f(x)| < 1$. $(*)$

Όμως, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής παίρνουμε ότι, για κάθε $x \in [a, +\infty)$, υπάρχει $\xi_x \in (x, x+\delta)$ με

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta},$$ δηλαδή

$$f(x+\delta) - f(x) = f'(\xi_x) \cdot \delta.$$

Όμως, αφού $\lim_{t\to+\infty} f'(t) = +\infty$, υπάρχει $M > a$ ώστε, για κάθε t με $t > M$ να ισχύει $f'(t) > \frac{2}{\delta}$. Άρα, για κάθε $x > M$, θα ισχύει $\xi_x > x > M$ άρα $f'(\xi_x) > \frac{2}{\delta}$ και τελικά $f(x+\delta) - f(x) = f'(\xi_x) \cdot \delta > 2$, άτοπο, αφού έρχεται σε αντίφαση με την $(*)$.

Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 3(β)

(i) Έστω $\alpha > 1$ και $f(x) = x^{\alpha}$, $x \in [0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \geq 0$.

Αφού $\alpha > 1$, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha \cdot x^{\alpha-1}) = +\infty$.

Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Έστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου $n \geq 2$ και $a_n \neq 0$.

Είναι $f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + \dots + a_1$, οπότε, αν $a_n > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, ενώ, αν $a_n < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.

Στην πρώτη περίπτωση, από το (α) αμέσως παίρνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αν τώρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$, όμοια με το (α) προκύπτει και πάλι ότι η f δεν θα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(iii) Έστω $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = e^x$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ και το (α) μας δίνει πάλι ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

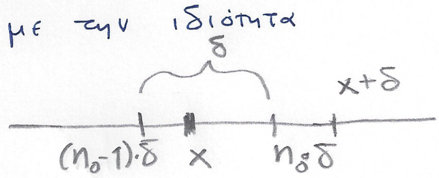
4. (α) Δείξτε ότι, αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \le A|x| + B$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δώστε μία διαφορετική απόδειξη για τα (i), (ii), (iii) της Άσκησης 3.

(α) Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Τότε, για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε:
Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta_1$, τότε $|f(x) - f(y)| < 1$.
Θέτουμε $\delta = \frac{\delta_1}{2}$. (Το δ είναι σταθερό σε όλα τα παρακάτω.)
Έστω τώρα x με $x > 0$.

Επιλέγουμε $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(n_0 - 1)\cdot\delta \le x < n_0 \cdot \delta$$



Τότε

$$|f(x) - f(0)| \le |f(\delta) - f(0)| + |f(2\delta) - f(\delta)| + \dots + |f(x) - f((n_0-1)\cdot\delta)|$$

$$< n_0 \cdot 1 = \frac{n_0 \cdot \delta}{\delta} < \frac{x+\delta}{\delta} = \frac{1}{\delta}\cdot x + 1$$

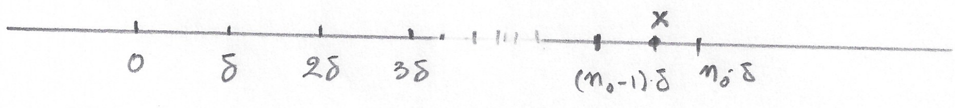
Άρα

$$|f(x)| \le |f(x) - f(0)| + |f(0)| < \frac{1}{\delta}\cdot x + (|f(0)| + 1).$$

Όμοια, για κάθε $x < 0$, βρίσκουμε

$$|f(x)| < \frac{1}{\delta}|x| + (|f(0)| + 1).$$

Θέτοντας $A = \frac{1}{\delta}$ και $B = |f(0)| + 1$, έχουμε το ζητούμενο.



4(β)

(i) Έστω $a>1$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^a$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τότε, από το (α) θα υπάρχουν σταθερές $A, B>0$ ώστε να ισχύει:

$$x^a \leq A\cdot x + B, \quad \text{για κάθε } x\geq 0$$

Ειδικότερα, για κάθε $x\geq 1$, θα ισχύει

$$x^{a-1} \leq A+\frac{B}{x} \Rightarrow x^{a-1}\leq A+B$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{a-1}=+\infty$, αφού $a>1$. Άτοπο.

Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

(ii) Όμοια

(iii) Υποθέτουμε ότι η $f(x)=e^x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Τότε θα υπάρχουν σταθερές $A, B>0$ ώστε να ισχύει:

$$e^x \leq A\cdot|x|+B, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Ειδικότερα, για κάθε $x\geq 1$, θα ισχύει

$$e^x\leq A\cdot x+B \Rightarrow \frac{e^x}{x}\leq A+\frac{B}{x}\leq A+B.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, άτοπο.

Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. (α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$, δηλαδή υπάρχουν $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Εξετάστε αν είναι ομοιόμορφα συνεχής η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$.

(α) Υποθέτουμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, δηλαδή ότι ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής χρησιμοποιώντας τις Ασκήσεις 7(α) και 9 από τις Σημειώσεις.

Θέτουμε $h(x)=\lambda x+\beta$, $x\in[a,+\infty)$

και $g(x)=f(x)-h(x)$, $x\in[a,+\infty)$.

Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $f(x)=g(x)+h(x)$

(ii) Η h είναι ομοιόμορφα συνεχής ως πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

(iii) Ισχύει $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ (υπόθεση) και η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, οπότε από την Άσκηση 9 (Σ) παίρνουμε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,+\infty)$.

Από την Άσκηση 7(α) έχουμε τώρα ότι το άθροισμα δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Ισχύει $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cos\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{y\to0^+}\dfrac{\cos y-1}{y}=-\sin 0=0$. Άρα η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

και η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, άρα, σύμφωνα με το (α), η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$.

Επιπλέον, αφού η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ και ισχύει $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(x\cdot \cos\frac{1}{x}\right) = 0$ (Κριτήριο Παρεμβολής), παίρνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ (Θεώρημα 3.3.3).

Τέλος, από την Άσκηση 7(α) (Φ), συμπεραίνουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.

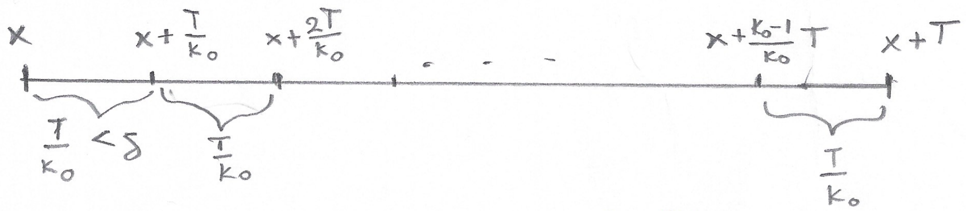
6. (α) Δίνεται συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Υπάρχει $T > 0$ και ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n + T) - f(x_n)| = +\infty$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. (*Υπόδειξη:* Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, για $\varepsilon = 1$, θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in [a, +\infty)$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < 1$. Επιλέξτε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{T}{k_0} < \delta$. Δείξτε ότι τότε θα ισχύει $|f(x + T) - f(x)| < k_0$, για κάθε $x \in [a, +\infty)$.)

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(α) Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, για $\varepsilon = 1$, θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x, y \in [a, +\infty)$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < 1$.
Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{T}{k_0} < \delta$ (Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$). Τότε, για κάθε $x \in [a, +\infty)$, θα ισχύει:

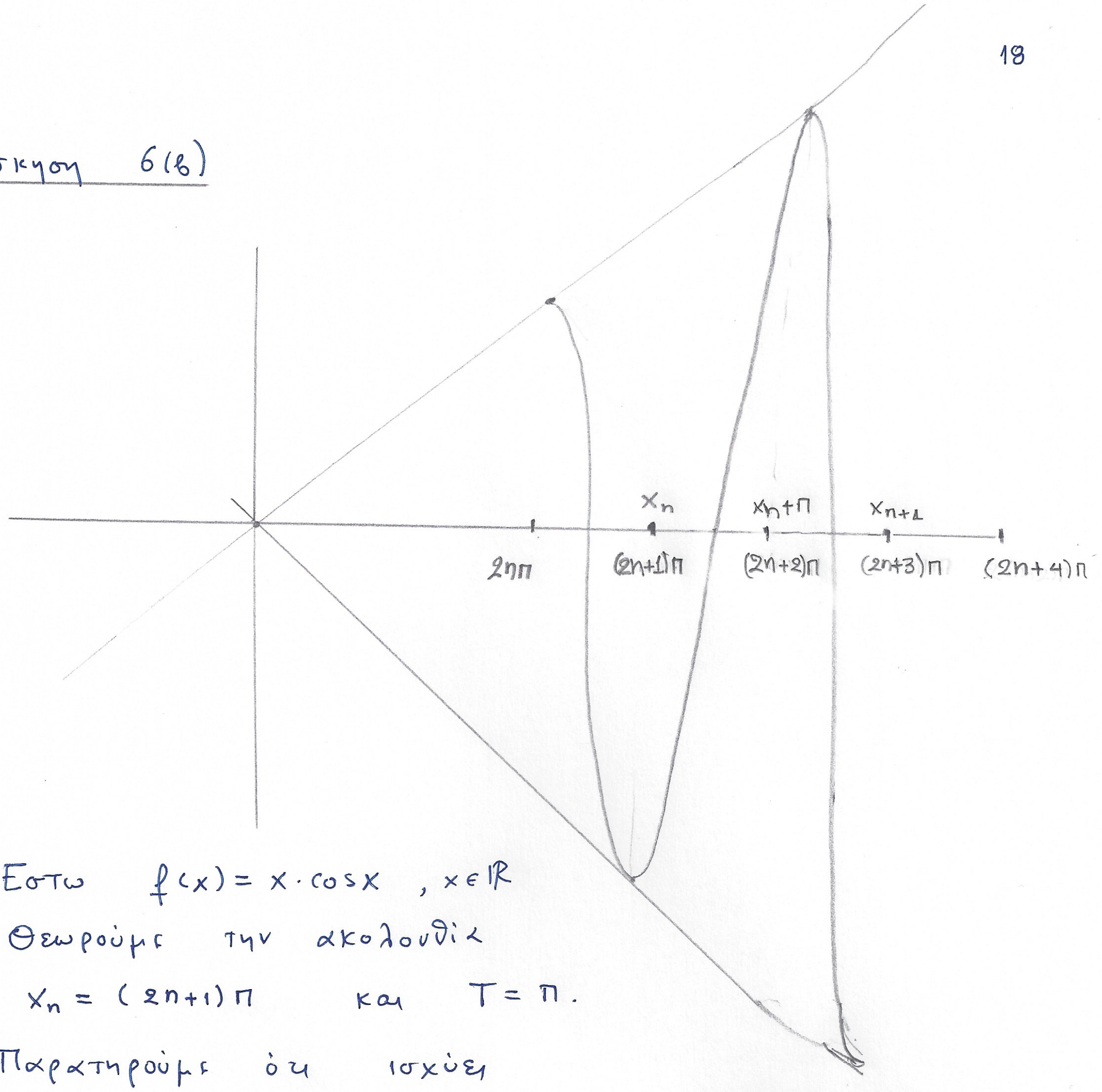
$$|f(x+T) - f(x)| \leq \left|f(x+T) - f\left(x + \frac{k_0-1}{k_0}T\right)\right| + \left|f\left(x+\frac{k_0-1}{k_0}T\right) - f\left(x+\frac{k_0-2}{k_0}T\right)\right| + \dots + \left|f\left(x+\frac{1}{k_0}T\right) - f(x)\right| < k_0 \cdot 1 = k_0,$$

αφού, για κάθε $i = 1, \dots, k_0$ είναι $\left(x + \frac{i}{k_0}T\right) - \left[x + \frac{(i-1)}{k_0}T\right] = \frac{T}{k_0} < \delta$, άρα $\left|f\left(x+\frac{i}{k_0}T\right) - f\left(x + \frac{(i-1)}{k_0}T\right)\right| < 1$.



Άρα, για οποιαδήποτε ακολουθία (x_n), η ακολουθία $\Delta_n = |f(x_n + T) - f(x_n)|$ θα ήταν άνω φραγμένη από το k_0. Άτοπο.
Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 6(β)



Έστω $f(x) = x \cdot \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε την ακολουθία

$x_n = (2n+1)\pi$ και $T = \pi$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$f((2n+1)\pi+\pi) - f((2n+1)\pi) = (2n+2)\pi \cdot \cos((2n+2)\pi) - (2n+1)\pi\cos((2n+1)\pi)$$
$$= (2n+2)\pi + (2n+1)\pi = (4n+3)\pi$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \left[f((2n+1)\pi+\pi) - f((2n+1)\pi) \right] = +\infty .$$

Σύμφωνα με το (α), συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. (α) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του I. Έστω $A = \{x \in I : x \leq a\}$ και $B = \{x \in I : x \geq a\}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και ομοιόμορφα συνεχής στο B, δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0,1) \cup (1,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0,1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1,2]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $(1,2]$, αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(α) Έστω $\varepsilon > 0$.

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A = \{x \in I : x \leq a\}$, άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: Για κάθε $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta_1$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ανάλογα, αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $B = \{x \in I : x \geq a\}$, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: Για κάθε $x, y \in B$ με $|x-y| < \delta_2$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Έστω $x, y \in I$ με $|x-y| < \delta$.

Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις:

<u>Περ. 1</u>: $x, y \leq a$. Τότε $x, y \in A$ και αφού $|x-y| < \delta \leq \delta_1$, παίρνουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

<u>Περ. 2</u>: $x, y \geq a$. Τότε $x, y \in B$ και αφού $|x-y| < \delta \leq \delta_2$, παίρνουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

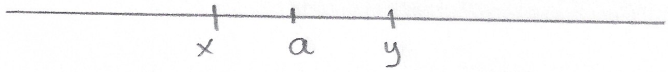
<u>Περ. 3</u>: $x < a < y$ (ή $y < a < x$ που είναι ίδια)

Τότε $0 < a - x < y - x < \delta \leq \delta_1$ και $0 < y - a < y - x < \delta \leq \delta_2$, και, αφού $x, a \in A$ και $|x - a| < \delta_1$, είναι $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ενώ, αφού $a, y \in B$ και $|y - a| < \delta_2$, είναι $|f(y) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Συμπεραίνουμε ότι

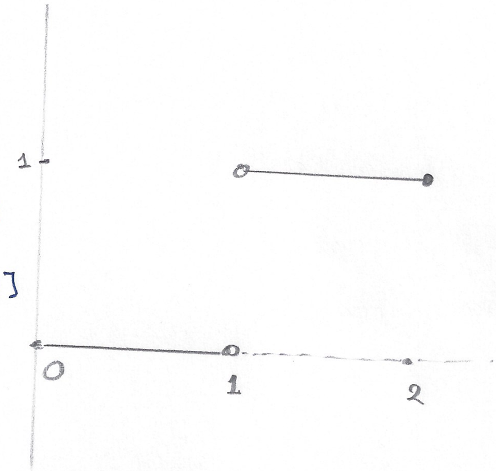
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.



Παρεμβάλλουμε το a μεταξύ των x και y

(β)



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)$, αφού είναι σταθερή εκεί.
(Ισχύει $f(x)-f(y)=0$, για κάθε $x,y \in [0,1)$).

Όμοια, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1,2]$.

Όμως η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A=[0,1) \cup (1,2]$, αφού, για παράδειγμα, για τις ακολουθίες (x_n) με $x_n = 1-\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και (y_n) με $y_n = 1+\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$y_n - x_n = \frac{2}{n} \longrightarrow 0$, αλλά

$f(y_n) - f(x_n) = 1 \not\to 0$.

(Παρατηρήστε όμως ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, A.)