

Απειροστικός Λογισμός II

Χειμερινό Εξάμηνο 2021 - 22

4η Σειρά Ασκήσεων - Ολοκλήρωμα Riemann

1. (α) Δίνεται συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) = c \neq 0$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (a, b]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(β) Έστω $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $g(t_i) \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ και $g(x) = 0$, για κάθε $x \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g(x)dx = 0$.

(γ) Δίνονται συναρτήσεις $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη και η ψ διαφέρει από την ϕ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων. Δείξτε ότι και η ψ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx$.

2. Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και αν ναι, βρείτε το ολοκλήρωμά της:

(α) $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \notin \{1, \frac{1}{2}, \dots\}$.

(β) $f(x) = x$, αν $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ (όπου \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών αριθμών).

3. (α) Δείξτε ότι, αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και έχει την ιδιότητα ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, είναι σωστό ότι η g είναι κατ' ανάγκη ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$;

4. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $A \subseteq [a, b]$. Δείξτε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\} = \sup\{f(x) : x \in A\} - \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ολοκληρώματος και το κριτήριο του Riemann (χωρίς το Θεώρημα 4.4.8), αποδείξτε ότι:

(i) η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(ii) η συνάρτηση f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(γ) Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, ισχύει κατ' ανάγκη ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$;

(δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, να αποδείξετε ότι και οι συναρτήσεις $\phi = \max\{f, g\}$ και $\psi = \min\{f, g\}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ (όπου $\forall x \in [a, b] \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ και $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$).

(Υπόδειξη: Για κάθε $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι $\max\{\gamma, \delta\} = \frac{1}{2}(\gamma + \delta + |\gamma - \delta|)$ και ανάλογος τύπος ισχύει για το $\min\{\gamma, \delta\}$.)