Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Χειμερινό Εξάμηνο 2021 - 22

5η Σειρά Ασκήσεων

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού
Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε την g.

2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[a, b]$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x f^2(t)dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

3. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών. Τα περισσότερα προκύπτουν χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann κατάλληλων συναρτήσεων. Υπάρχει όμως ανάμεσά τους ένα μαύρο πρόβατο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με άλλη μέθοδο.

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n} \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$\text{(iii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \qquad \text{(iv)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2} \right)$$

$$\text{(v)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

4. (α) Δίνεται διάστημα $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ και συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \neq x_0$ και $f(x_0) = c \neq 0$. Χρησιμοποιώντας τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού, δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα στο $[a, b]$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, το αόριστο ολοκλήρωμα της οποίας ισούται με τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$.

5. Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι η $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t)\, dt$$

είναι αύξουσα.

6. Ορίζουμε $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t)\, dt.$$

Βρείτε τον τύπο της G.

7. Ορίζουμε $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή με δύο τρόπους:

(α) Υπολογίζοντας την παράγωγό της.

(β) Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα.

8. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$$

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 x^{n-1} f(x)\, dx \right) = f(1).$$

9. (α) Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\, dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(β) Βρείτε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, με την ιδιότητα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\, dx$ να είναι πεπερασμένο, αλλά η f να μην έχει όριο στο $+\infty$. (Δεν χρειάζεται να δώσετε τύπο για την f, μπορείτε απλώς να την περιγράψετε.)

10. Αποδείξτε ότι, για κάθε πολυώνυμο βαθμού n, ισχύει

$$\int e^{-x} p(x) dx = -e^{-x} \cdot [p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x)] + c$$

11. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, για κάθε τιμή του $n \in \mathbb{N}$.