Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)
Υπακολουθίες και Ακολουθίες Cauchy – Ασκήσεις

Ομάδα Α′. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. $a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

2. Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$.

3. Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.

4. Αν μια ακολουθία δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία.

5. Αν η (a_n) είναι φραγμένη και $a_n \not\to a$ τότε υπάρχουν $b \neq a$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to b$.

6. Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

7. Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία.

8. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι αύξουσα.

9. Αν η (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.

10. Αν $a_n \to 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $n^2 a_{k_n} \to 0$.

Ομάδα Β′

11. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a.

12. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:

(α) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}$.

(β) Η (a_n) συγκλίνει.

13. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Τότε η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί την $a_{2n} \leq a \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. Έστω (a_n) μια ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία οριακών σημείων της (a_n). Υποθέτουμε οτι $x_k \to x$. Δείξτε οτι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

15. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a, αν και μόνο αν υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

16. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της (a_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο a.

17. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 > 0$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + a_n}.$$

Δείξτε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

18. Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right), \\ b_n &= \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{1}{n+1}, \\ \gamma_n &= \frac{n^2((-1)^n+1)+2n+1}{n+1}. \end{aligned}$$

19. Έστω (a_n), (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε οτι

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n+b_n) \\ &\leq \limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

20. Έστω $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε οτι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(β) Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to x$.

21. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Δείξτε οτι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n \quad \text{και} \quad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

22. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Αν

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a_n \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\},$$

δείξτε ότι $\sup X = \limsup a_n$.

23. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

24. Έστω $0 < \mu < 1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει

$$|a_{n+1}-a_n| \leq \mu |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

25. Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Ομάδα Γ΄

26. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Βρείτε μια ακολουθία (a_n) η οποία να έχει ακριβώς m διαφορετικές υπακολουθίες.

27. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to 1$.

28. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.

29. Ορίζουμε μια ακολουθία ως εξής:

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}.$$

Βρείτε όλα τα οριακά σημεία της (a_n). [*Υπόδειξη:* Γράψτε τους δέκα πρώτους όρους της ακολουθίας.]

30. Έστω (x_n) ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$. Αν $a < b$ είναι δύο οριακά σημεία της (x_n), δείξτε ότι κάθε $y \in [a, b]$ είναι οριακό σημείο της (x_n). [*Υπόδειξη:* Απαγωγή σε άτοπο.]

31. (α) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε κάθε $x \in A$ να είναι οριακό σημείο της (a_n).

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι οριακό σημείο της (x_n).

32. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Ορίζουμε

$$b_n = \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

33. Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $a_1 = a$, $a_2 = b$ και

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Εξετάστε αν η (a_n) συγκλίνει και αν ναι, βρείτε το όριό της.