Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)
Σειρές πραγματικών αριθμών – Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

2. Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

3. Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

4. Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

5. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

6. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

7. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

8. Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

9. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

10. Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

11. Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n), τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

12. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

13. Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots (2k)}{k!}$ συγκλίνει.

14. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p < -1$.

Β΄ Ομάδα

15. Δείξτε ότι αν $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ τότε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

16. Δείξτε ότι

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

17. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

18. Εξετάστε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

19. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

20. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

και

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots.$$

21. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη – για την ακολουθία (a_n) – ώστε να συγκλίνει η σειρά

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots.$$

22. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$.

23. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

24. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0 < p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ $(0 < q < p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ $(0 < q < p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)$.

25. Έστω ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

26. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

27. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$.

28. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}$.

29. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $k a_k \to 0$.

30. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

31. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

32. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

33. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

Γ΄ Ομάδα

34. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

35. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

36. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

37. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k$ αποκλίνει.

38. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

39. Έστω (a_k) η ακολουθία που ορίζεται από τις

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{και} \quad a_{2k} = \frac{1}{2^k}.$$

Εξετάστε αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ συγκλίνει.

40. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{m=k+1}^{2k} a_m.$$

Δείξτε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. [*Υπόδειξη:* Αν s_n και t_n είναι τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών, δοκιμάστε να συγκρίνετε τα s_{2n} και t_n.]

41. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία

$$b_k = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k}{k(k+1)}.$$

Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και τα αθροίσματα των δύο σειρών είναι ίσα.

42. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ και $a_k \to 0$. Δείξτε ότι αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε υπάρχουν φυσικοί $m \leq n$ ώστε

$$\alpha < \sum_{k=m}^{n} a_k < \beta.$$

43. Δείξτε ότι αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε υπάρχουν φυσικοί $m \leq n$ ώστε

$$\alpha < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} < \beta.$$