Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)

Ομοιόμορφη συνέχεια – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Δείξτε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano–Weiertstrass:

(α) Δείξτε πρώτα ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, με απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a, b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a, b]$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς (η f είναι συνεχής στο x_0) για να καταλήξετε σε άτοπο.

(β) Από το (α) έχουμε $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} < \infty$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a, b]$ ώστε $f(x_n) \to M$ (εξηγήστε γιατί). Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a, b]$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς (η f είναι συνεχής στο x_0) για να συμπεράνετε ότι $f(x_0) = M$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή (στο x_0).

(γ) Εργαζόμενοι όμοια, δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

2. Έστω $X \subseteq R$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|.$$

Δείξτε ότι αν η $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

3. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b). Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.

4. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;

5. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν συνθήκη Lipschitz:

(α) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.

(β) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$.

6. Έστω $f : [a, b] \to [m, M]$ και $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

12. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
(β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

13. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε $\hat{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

14. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.
2. $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.
4. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
5. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.
6. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
7. $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$.
8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
10. $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.
12. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Ομάδα Β΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

15. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

16. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

17. Αν η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

18. Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.

19. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$, τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ υπάρχει.

20. Θεωρούμε τις $f(x)=x$ και $g(x)=\sin x$. Οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, όμως η fg δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

21. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ αν $x>0$ και $f(x)=2x$ αν $x\leq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

22. Κάθε φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ομάδα Γ΄

23. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x\in(0,1)$ και $f(x)=1$ αν $x\in(1,2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

24. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε πεπερασμένα το πλήθος διαδοχικά υποδιαστήματα του ιδίου μήκους έτσι ώστε: αν τα x,y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα, τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

25. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

26. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T>0$ ώστε $f(x+T)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

27. Έστω $X\subset\mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο και $f:X\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in X$.

28. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\inf\{|x-a|:a\in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι
(α) $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
(β) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.