Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)

Ολοκλήρωμα Riemann – Ασκήσεις

Ομάδα Α′. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

2. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

3. Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4. Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

5. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

6. Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

7. Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

8. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Ομάδα Β′

9. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

10. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

11. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

12. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:
(α) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.
(β) $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

13. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):
(α) $f(x) = x + [x]$.
(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

14. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

15. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

16. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

17. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

18. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

19. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

20. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

21. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

22. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

23. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

24. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx$ συγκλίνει.

25. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

για κάθε $x,y\in[0,1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Ομάδα Γ΄

26. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

27. Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση με $f(0)=0$. Δείξτε ότι για κάθε $a,b>0$

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(a)=b$.

28. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|f(x)| \leq M\int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

29. Έστω $a\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

30. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

31. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) - L(f, P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a, b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a, b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

32. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Ομάδα Δ΄. Συμπληρώματα της Θεωρίας

Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

33. Έστω $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ τρείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι οι f, h είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = I.$$

Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x)dx = I.$$

34. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως, ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

35. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

36. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[a, b]$. Δείξτε ότι:

(α) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$.

(β) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

(γ) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.

(δ) $\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$.

(ε) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ αν η f είναι περιττή.

(στ) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ αν η f είναι άρτια.

38. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε κλιμακωτές συνάρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [a,b]\to\mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [a,b]\to\mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon.$$