Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f, f_n : I \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι κυρτή συνάρτηση και ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.

2. Έστω $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $f_n : I \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Αν η f είναι πεπερασμένη παντού στο I, τότε η f είναι κυρτή.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Υποθέτουμε ακόμα ότι η g είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι κυρτή.

4. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$f(x_1 + \delta) - f(x_1) \leq f(x_2 + \delta) - f(x_2)$$

για κάθε $x_1 < x_2 \in I$ και $\delta > 0$ για το οποίο $x_1 + \delta, x_2 + \delta \in I$.

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνάρτηση Lipschitz σε ολόκληρο το $[a, b]$, ακόμα και αν υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Επίσης, δείξτε ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $[a, b]$.

6. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\xi \in (a, b)$. Δείξτε ότι:

(α) αν η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ τότε η f είναι σταθερή.

(β) αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ τότε η f είναι φθίνουσα στο (a, ξ) και αύξουσα στο (ξ, b).

(γ) αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ τότε έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.

(δ) αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν η f είναι άνω φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

8. Δείξτε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα είναι κάτω φραγμένη.

9. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ κοίλη, αύξουσα, άνω φραγμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} x f'(x) = 0.$$

Ομάδα Β΄

10. Δείξτε ότι αν η $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m > 0$, τότε

$$(x_1 + \cdots + x_m) f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_m}{x_1 + \cdots + x_m}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Δείξτε ότι η $f(x) = (1 + x^p)^{1/p}$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ όταν $p \geq 1$, και συμπεράνατε ότι

$$((x_1 + \cdots + x_m)^p + (y_1 + \cdots + y_m)^p)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{m} (x_i^p + y_i^p)^{1/p}.$$

11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $-\sin x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$. Χρησιμοποιώντας το δείξτε ότι η μέγιστη περίμετρος n-γώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι $2n\sin(\pi/n)$.

12. Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ θετικοί αριθμοί. Δείξτε ότι

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n)\geq \left(1+(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)^n.$$

[*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι η $x\mapsto \ln(1+e^x)$ είναι κυρτή.]

Ομάδα Γ′

13. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ θετική κοίλη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $1/f$ είναι κυρτή.

14. Έστω $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $k\geq 1$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx\geq 0.$$

15. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$f(x)\leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$$

για κάθε διάστημα $[x-h,x+h]\subset(a,b)$.

16. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $c\in(a,b)$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο c αν και μόνο αν

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}=0.$$

17. Έστω $f:[0,+\infty)$ κυρτή, μη αρνητική συνάρτηση με $f(0)=0$. Ορίζουμε $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $F(0)=0$ και

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η F είναι κυρτή.