Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙ

Οι ασκήσεις αυτές είναι σαφώς εκτός της εξεταστέας ύλης του μαθήματος. Μπορείτε να ασχοληθείτε για τη διασκέδασή σας.

Α. Υπακολουθίες και βασικές ακολουθίες.

1. Έστω $\alpha \in (0,1]$ και έστω (b_n) φραγμένη ακολουθία που ικανοποιεί την $b_{n+1} \leqslant \alpha b_n + (1-\alpha)b_{n-1}$ για κάθε $n \geqslant 2$. Δείξτε ότι η (b_n) συγκλίνει.

2. Έστω (a_n) ακολουθία με την ιδιότητα ότι για κάθε $n \geqslant 2$ υπάρχει k τέτοιος ώστε $n/2 \leqslant k \leqslant n$ και $a_n = \frac{a_k}{2}$. Αποδείξτε ότι $a_n \to 0$.

3. Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε: για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{x_n}{n} \longrightarrow \inf\left\{\frac{x_k}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. Έστω $0 < x_1 < 1$. Ορίζουμε μια ακολουθία θέτοντας $x_{n+1} = x_n(1 - x_n^n)$ για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} x_n > 0.$$

5. Έστω (a_n) ακολουία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \geqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ακολουθία $a_n + \frac{1}{a_n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει κι αυτή σε πραγματικό αριθμό.

6. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία μη μηδενικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε η ακολουθία $b_n = \frac{a_{k_{n+1}}}{a_{k_n}}$ να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

7. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant e.$$

8. Έστω ξ άρρητος πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|q_n\xi - p_n| < \frac{1}{n}.$$

Δείξτε επίσης ότι οι p_n, q_n μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

9. Έστω ξ άρρητος πραγματικός αριθμός. Προσδιορίστε όλα τα υπακολουθιακά όρια της ακολουθίας

$$x_n = n\xi - \lfloor n\xi \rfloor,$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του x.

10. Έστω ξ άρρητος πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $|(m + n\xi) - x| < \varepsilon$.

11. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sin n$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-1,1]$ υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε $a_{k_n} \to x$.

12. Εξετάστε αν υπάρχει υπακολουθία της ακολουθίας $\sqrt{n}\sin n$ η οποία να συγκλίνει στο 0.

Β. Σειρές πραγματικών αριθμών.

13. Έστω (a_k) ακολουθία φυσικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ συγκλίνει. Αν b_n είναι το πλήθος των a_k που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

14. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία η ακολουθία $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Δείξτε ότι, για κάθε $s > 1$, η ακολουθία

$$\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n} k^{s-1} a_k$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

15. Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

16. Έστω (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_1 k_2 \cdots k_{n-1}} = +\infty.$$

Αποδείξτε ότι ο $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ είναι άρρητος.

17. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \to p \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι: αν $p > 1$ τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ αν $p < 1$ τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

18. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) \to p \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι: αν $p > 1$ τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ αν $p < 1$ τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

19. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$ αποκλίνει.

20. Σωστό ή λάθος; Έστω (a_n) και (b_n) φθίνουσες ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στο 0, τέτοιες ώστε οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ να αποκλίνουν. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ αποκλίνει.

21. Έστω (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ συγκλίνει.

22. Έστω (a_n) η ακολουθία των διαδοχικών θετικών ριζών της $\tan x = x$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$.

23. Έστω $a_1 > 0$ και $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

24. (α) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει και $\frac{a_n}{s_n} \longrightarrow 0$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\ln s_n}\left(\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}+\cdots+\frac{a_n}{s_n}\right) \longrightarrow 1.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\frac{!+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} \longrightarrow 1.$$

25. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να συγκλίνει. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} < e\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$