Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2019-20)

Συμπληρωματικές Ασκήσεις 7ου Κεφαλαίου

1. Για καθεμία από τις επόμενες δυναμοσειρές

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots \\
\text{(ii)} & 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots \\
\text{(iii)} & \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3\cdot 2} + \dfrac{x^4}{4\cdot 3} - \dfrac{x^5}{5\cdot 4} + \cdots \\
\text{(iv)} & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots
\end{array}
$$

α) βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και προσδιορίστε το σύνολο σύγκλισης,
β) βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-R, R)$.

2. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}, & \text{(ii)} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \\
\text{(iii)} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} & \text{(iv)} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \\
\text{(v)} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)} & \text{(vi)} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}
\end{array}
$$

3. Βρείτε τις παραγώγους κάθε τάξης στο 0 των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$

(ii) $g(x) = xe^{x^2}$

4. Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, για κάθε $x \in (-R, R)$. Δείξτε ότι, αν η f είναι άρτια συνάρτηση, τότε $a_n = 0$ για κάθε n περιττό, ενώ αν η f είναι περιττή συνάρτηση, τότε $a_n = 0$ για κάθε n άρτιο.

5. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ισούται με 1.

6. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη (δηλαδή συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως). Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ισούται με 1.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f^{(k)}(x)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Taylor της f με κέντρο το 0 συγκλίνει στην f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.