

Απειροστικός Λογισμός 2

Δευτέρα 1 Σεπτεμβρίου 2025

Ώρα: 09:00–11:00

Θέμα 1. (1+1+1 μον.)

- (α) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.
- (β) Υπολογίστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ τάξης n της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ για $|x| < 1$.
- (γ) Έστω $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$.

Θέμα 2. (2.5 μον.)

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right), \quad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad \text{(iii)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^2}, \\ \text{(iv)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 1}{k^4 + 7k^2 + 8}, \quad \text{(v)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k. \end{aligned}$$

Θέμα 3. (0.75+0.75+1 μον.)

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \quad \int x \sin(x) \cos(x) dx, \quad \text{(ii)} \quad \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx, \quad \text{(iii)} \quad \int \frac{4x^2 + 2x}{(1 + x^2)(x - 2)} dx.$$

Θέμα 4. (1+1+1 μον.)

- (α) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε $U(f, P) = L(f, P)$ για κάποια διαμέριση P του $[a, b]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.
- (β) Δείξτε ότι μία ακολουθία (a_n) δεν είναι φραγμένη, αν και μόνο αν, έχει υπακολουθία (a_{k_n}) τέτοια ώστε $|a_{k_n}| \rightarrow +\infty$.
- (γ) Βρείτε τα οριακά σημεία της ακολουθίας

$$a_n := (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \left(1 - 2(\sin(n\pi/4))^2 \right).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!