

Απειροστικός Λογισμός II
4 Φεβρουαρίου 2025

Θέμα 1. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow a_0$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχει δική της περαιτέρω υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ που συγκλίνει στο a_0 .

(β) Βρείτε όλα τα οριακά σημεία της ακολουθίας $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{3(-1)^n n^2}{4n^5 + n^4}$.

Θέμα 2. (1+1.5 μ.) (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sqrt{k}}{3k^4 - 2}, \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \sin^p\left(\frac{1}{k}\right), \quad (iii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{(3k)!}$$

όπου $p > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχουν παράμετροι, εξετάστε για ποιες τιμές των παραμέτρων συγκλίνει η αντίστοιχη σειρά).

(β) Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα και γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}, \quad (ii) \int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx, \quad (iii) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Θέμα 3. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) (=:\ell \in \mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4. (1+1+0.5 μ.) (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση ($a < b$ στο $\mathbb{R}$). Υποθέτουμε ότι $f \geq 0$ στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι συνεχής, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$ αν και μόνο αν $f \equiv 0$ στο $[a, b]$.

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0 . Ορίζουμε $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει η $F'(x_0)$ και $F'(x_0) = f(x_0)$.

(γ) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx$.

Θέμα 5. (1.5+1 μ.) (α) Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \arctan x$, $-1 \leq x \leq 1$. Υπολογίστε το πολώνυμο Taylor $T_{2n+1, f, 0}$, $n \geq 0$, και αποδείξτε ότι η f αναπύσσεται κατά Taylor στο $[-1, 1]$.

(β) Υπολογίστε με χρήση του (α) τα αθροίσματα (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ και (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}$.

Καλή Επιτυχία!