

Απειροστικός Λογισμός II
Ενδιάμεση Εξέταση

14 Δεκεμβρίου 2024

1. (α) (1 μ.) Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $a_n \not\rightarrow a$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) ώστε $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) (1.5 μ.) Βρείτε όλα τα οριακά σημεία της ακολουθίας

$$a_n = (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n^2 + n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. (α) (1 μ.) Εξετάστε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και αν κάποια συγκλίνει υπολογίστε το άθροισμά της:

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 5^k}{15^k}, \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

(β) (1.5 μ.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές (αν υπάρχει παράμετρος x βρείτε για ποια x συγκλίνει και για ποια όχι):

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, x \in \mathbb{R} \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}, x \in \mathbb{R} \quad (iii) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin^3\left(\frac{1}{k}\right), \quad (iv) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k - 2^k}$$

3. (α) (1 μ.) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής σε όλο το I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I . Αποδείξτε ότι η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη (δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I).

(β) (1.5 μ.) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (στο $[0, +\infty)$).

4. (α) (1 μ.) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών) δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) (1.5 μ.) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση ($a < b$ στο $\mathbb{R}$). Αποδείξτε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

5. (α) (1 μ.) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση ώστε η f να είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[b, 1]$ για κάθε $0 < b \leq 1$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 1]$.

(β) (0.5 μ.) Δείξτε ότι $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 f(x) dx$.

(γ) (1 μ.) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη και αν ναι υπολογίστε το ολοκλήρωμά της.

Καλή Επιτυχία!