2 Το ολοκλήρωμα Riemann

Μία **διαμέριση** $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι **φραγμένη**, θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \\ U(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Τα $L(f,\mathcal{P})$ και $U(f,\mathcal{P})$ ονομάζονται **κάτω και άνω άθροισμα Riemann** της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Είναι σαφές ότι $L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P})$. Θεωρώντας διαδοχικά διαμερίσεις με όλο και περισσότερα σημεία, θα παρατηρήσουμε ότι τα κάτω αθροίσματα μεγαλώνουν, παραμένοντας όμως όλα μικρότερα (ή ίσα) από κάθε άνω άθροισμα, ενώ τα άνω αθροίσματα μικραίνουν, παραμένοντας όμως όλα μεγαλύτερα (ή ίσα) από κάθε κάτω άθροισμα. Αν υπάρχει *ένας και μοναδικός* αριθμός I ανάμεσα στα κάτω και τα άνω αθροίσματα, δηλαδή τέτοιος ώστε να ισχύει $L(f,\mathcal{P}) \leq I \leq U(f,\mathcal{Q})$ για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$, τότε αυτός ο αριθμός ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ δεν υπάρχει. Τα αθροίσματα Riemann λοιπόν αποτελούν κάτω και άνω προσεγγίσεις του ολοκληρώματος Riemann, όταν αυτό υπάρχει.

Πιο αναλυτικά:

Αν $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ είναι διαμερίσεις του $[a,b]$ και $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ (δηλαδή η $\mathcal{Q}$ περιέχει όλα τα σημεία της $\mathcal{P}$) τότε η $\mathcal{Q}$ λέγεται **εκλέπτυνση** της $\mathcal{P}$.

Πρόταση 2.1 *Αν $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ είναι διαμερίσεις του $[a,b]$,*

(α) $L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P})$.

(β) *Αν $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, τότε $L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{Q})$ και $U(f,\mathcal{P}) \geq U(f,\mathcal{Q})$.*

(γ) *Για κάθε* $\mathcal{P},\mathcal{Q}, \quad L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{Q})$.

(δ) $\sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ *διαμέριση του* $[a,b]\} \leq \inf\{U(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q}$ *διαμέριση του* $[a,b]\}$.

Απόδειξη (α) Προφανές από την ανισότητα $m_i \leq M_i$.

(β) Θα υποθέσουμε πρώτα ότι οι δυο διαμερίσεις διαφέρουν μόνο κατά ένα σημείο s:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < \quad t_k < \ldots < t_n = b\} \\ \mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{s\} &= \{a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < s < t_k < \ldots < t_n = b\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$U(f,\mathcal{P}) = M_0(t_1-t_0)+M_1(t_2-t_1)+\ldots+M_k(t_k-t_{k-1})+\ldots+M_n(t_n-t_{n-1})$$
$$U(f,\mathcal{Q}) = M_0(t_1-t_0)+M_1(t_2-t_1)+\ldots+M'(s-t_{k-1})+M''(t_k-s)+\ldots+M_n(t_n-t_{n-1})$$

όπου $M' = \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1},s]\}$ και $M'' = \sup\{f(x) : x \in [s,t_k]\}$, άρα $M' \leq M_k$ και $M'' \leq M_k$, οπότε

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}) - U(f,\mathcal{Q}) &= M_k(t_k - t_{k-1}) - M'(s - t_{k-1}) - M''(t_k - s) \\ &= (M_k - M')(s - t_{k-1}) + (M_k - M'')(t_k - s) \geq 0. \end{aligned}$$

Ομοίως ο όρος $m_k(t_k - t_{k-1})$ του αθροίσματος $L(f,\mathcal{P})$ αντικαθίσταται από τον $m'(s - t_{k-1}) + m''(t_k - s)$ στο άθροισμα $L(f,\mathcal{Q})$, όπου $m' = \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1},s]\}$ και $m'' = \inf\{f(x) : x \in [s,t_k]\}$, άρα $m' \geq m_k$ και $m'' \geq m_k$, οπότε $L(f,\mathcal{Q}) \geq L(f,\mathcal{P})$.

Η γενική περίπτωση, όταν η $\mathcal{Q}$ διαφέρει από την $\mathcal{P}$ κατά m σημεία, αποδεικνύεται με απλή επανάληψη των ίδιων επιχειρημάτων: Αν $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ (όπου $s_i \notin \mathcal{P}$) θέτουμε $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P} \cup \{s_1\}$, $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{P} \cup \{s_1, s_2\}, \ldots$, $\mathcal{Q}_m = \mathcal{Q}$ και παρατηρούμε ότι κάθε $\mathcal{Q}_i$ διαφέρει από την $\mathcal{Q}_{i+1}$ κατά ένα μόνο σημείο. Συνεπώς από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε $L(f,\mathcal{Q}_i) \leq L(f,\mathcal{Q}_{i+1})$ και $U(f,\mathcal{Q}_i) \geq U(f,\mathcal{Q}_{i+1})$, άρα τελικά

$$\begin{aligned} &L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{Q}_1) \leq L(f,\mathcal{Q}_2) \leq \ldots \leq L(f,\mathcal{Q}) \\ \text{και } \; &U(f,\mathcal{P}) \geq U(f,\mathcal{Q}_1) \geq U(f,\mathcal{Q}_2) \geq \ldots \geq U(f,\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

(γ) Εφαρμόζουμε το (β) στην *κοινή εκλέπτυνση* $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ των $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{R})$$
$$U(f,\mathcal{R}) \leq U(f,\mathcal{Q}).$$

Από το (α) όμως έχουμε $\quad L(f,\mathcal{R}) \leq U(f,\mathcal{R})$

και συνεπώς $\quad L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{Q})$.

(δ) Από το (γ) προκύπτει ότι κάθε $U(f,\mathcal{Q})$ είναι άνω φράγμα του συνόλου

$$\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμ. του } [a,b]\}.$$

Συνεπώς υπάρχει το $\quad \sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμ. του } [a,b]\} \equiv L$ και

$$L \leq U(f,\mathcal{Q}) \;\text{ για οποιαδήποτε διαμέριση } \mathcal{Q} \text{ του } [a,b].$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι το L είναι ένα κάτω φράγμα του συνόλου

$$\{U(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ διαμ. του } [a,b]\},$$

άρα το σύνολο αυτό έχει infimum και μάλιστα

$$L \leq \inf\{U(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ διαμ. του } [a,b]\}. \;\square$$

Ορισμός 2.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Ορίζουμε*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

***το άνω ολοκλήρωμα της** f **στο** $[a,b]$ και*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

***το κάτω ολοκλήρωμα της** f **στο** $[a,b]$.*
[Το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα κάθε φραγμένης συνάρτησης f πάντα υπάρχουν και $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.]

*Αν $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ τότε η f λέγεται **Riemann-ολοκληρώσιμη στο** $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b f(s)ds \overset{\text{ορ}}{=} \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Όταν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, γράφουμε για συντομία $f \in \Re[a,b]$.

***Συμβολισμός** Θέτουμε* $\qquad \displaystyle\int_a^a f = 0.$

Παρατήρηση 2.2 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε το $\int_a^b f$ είναι ο μοναδικός αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα*

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq U(f,\mathcal{P})$$

για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$.

Η επόμενη απλή Πρόταση είναι το βασικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας:

Πρόταση 2.3 (Κριτήριο Riemann) *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1}$$

Παρατήρηση 2.4 *Αν η $\mathcal{P}_\varepsilon$ ικανοποιεί την (1), τότε βεβαίως κάθε εκλέπτυνση της επίσης την ικανοποιεί, αφού από την Πρόταση 2.1 αν $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_\varepsilon$ τότε $U(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}_\varepsilon)$ και $L(f,\mathcal{P}) \geq L(f,\mathcal{P}_\varepsilon)$, άρα*

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Απόδειξη Κριτηρίου Riemann Υποθέτουμε πρώτα ότι η f *δεν* είναι ολοκληρώσιμη. Τότε θα έχουμε $\overline{\int_a^b} f > \underline{\int_a^b} f$. Αν θέσουμε $\varepsilon = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$, τότε $\varepsilon > 0$ και, επειδή κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ικανοποιεί $L(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f$ και $U(f,\mathcal{P}) \geq \overline{\int_a^b} f$, θα έχουμε αναγκαστικά $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \geq \varepsilon$, οπότε το κριτήριο Riemann δεν ικανοποιείται.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, από τον ορισμό του $\underline{\int_a^b} f$ ως $\sup\{L(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ διαμ. του } [a,b]\}$, υπάρχει διαμέριση $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$ ώστε $\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{Q})$ και ομοίως υπάρχει διαμέριση $\mathcal{R}$ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > U(f,\mathcal{R})$, οπότε, επειδή $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ έχουμε

$$U(f,\mathcal{R}) - L(f,\mathcal{Q}) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

Αν θέσουμε τώρα $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$ έχουμε από το Λήμμα 2.1(β) ότι $U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \leq U(f,\mathcal{R})$ και $L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \geq L(f,\mathcal{Q})$, άρα

$$U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon. \qquad \square$$

Πόρισμα 2.5 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\{\mathcal{P}_n\}$ του $[a,b]$ ώστε $\lim_n (U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n)) = 0$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b f = \lim_n U(f,\mathcal{P}_n) = \lim_n L(f,\mathcal{P}_n).$$

Απόδειξη Εφόσον η ακολουθία $(U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n))_n$ τείνει στο 0, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $U(f,\mathcal{P}_{n_o}) - L(f,\mathcal{P}_{n_o}) < \varepsilon$. Επομένως το $\int f$ υπάρχει από το κριτήριο Riemann. Για κάθε n έχουμε

$$L(f,\mathcal{P}_n) \le \int f \le U(f,\mathcal{P}_n)$$

άρα
$$0 \le \int f - L(f,\mathcal{P}_n) \le U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n)$$

και
$$0 \le U(f,\mathcal{P}_n) - \int f \le U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n)$$

οπότε $\lim_n(\int f - L(f,\mathcal{P}_n)) = 0$ και $\lim_n(U(f,\mathcal{P}_n) - \int f) = 0$.

Παραδείγματα 2.6 ***(α)*** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ σταθερή: αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ και $\int_a^b f = c(b-a)$.*

(β) *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ σταθερή εκτός ενός σημείου: αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b] \setminus \{x_o\}$ τότε $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ και $\int_a^b f = c(b-a)$.*

(γ) *Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, τότε $f \in \mathfrak{R}[0,1]$ και $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.*

(δ) *Η συνάρτηση Dirichlet ($f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ όταν x ρητός και $f(x) = 0$ όταν x άρρητος)* δεν είναι *Riemann-ολοκληρώσιμη.*

(α) Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ έχουμε $M_i = m_i = c$ και συνεπώς

$$L(f,\mathcal{P}) = U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

Επομένως

$$\sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμ. του } [a,b]\} = \inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμ. του } [a,b]\} = c(b-a).$$

(β) Για να αποδείξουμε την ολοκληρωσιμότητα της f, αλλά και για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, αρκεί να «εγκλωβίσουμε» το x_o σε ένα «αρκετά μικρό» διάστημα. Συγκεκριμένα, αν $x_o \in (a,b)$ μπορούμε να διαλέξουμε

$\mathcal{P}_n = \{a < x_o - \frac{1}{n} < x_o + \frac{1}{n} < b\}$ για κάθε (αρκετά μεγάλο)[1] $n \in \mathbb{N}$, και θα έχουμε (θέτοντας $M = \max\{f(x_o), c\}$ και $m = \min\{f(x_o), c\}$)

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}_n) &= c\left((x_o - \frac{1}{n}) - a\right) + m\left((x_o + \frac{1}{n}) - (x_o - \frac{1}{n})\right) + c\left(b - (x_o + \frac{1}{n})\right) \\ &= c(b-a) + 2(m-c)\frac{1}{n} \\ U(f, \mathcal{P}_n) &= c\left((x_o - \frac{1}{n}) - a\right) + M\left((x_o + \frac{1}{n}) - (x_o - \frac{1}{n})\right) + c\left(b - (x_o + \frac{1}{n})\right) \\ &= c(b-a) + 2(M-c)\frac{1}{n} \end{aligned}$$

οπότε $\lim_n(U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n)) = 0$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη (από το τελευταίο Πόρισμα) και

$$\int_a^b f = \lim_n L(f, \mathcal{P}_n) = c(b-a).$$

(γ) Διαιρούμε το $[0,1]$ σε n ίσα μέρη: $\mathcal{P}_n = \{0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1\}$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}_n) &= 0\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ U(f, \mathcal{P}_n) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + 1^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2. \end{aligned}$$

Επομένως

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{n} \to 0$$

πράγμα που δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη (από το τελευταίο Πόρισμα), και

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_n U(f, \mathcal{P}_n) = \lim_n \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_n \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

[1] δηλ. τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \min\{x_o - a, b - x_o\}$. Στις περιπτώσεις $x_o = a$ ή $x_o = b$, χρησιμοποιούμε αντί της $\mathcal{P}_n$ τις διαμερίσεις $\mathcal{Q}_n = \{a, a + \frac{1}{n}, b\}$, και $\mathcal{R}_n = \{a, b - \frac{1}{n}, b\}$ αντίστοιχα.

(δ) Όποια διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0,1]$ και να θεωρήσουμε, σε κάθε διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι. Επομένως $m_k = 0$ και $M_k = 1$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, άρα $L(f, \mathcal{P}) = 0$ και $U(f, \mathcal{P}) = 1$ οπότε τα κάτω και άνω ολοκληρώματα δεν είναι ίσα.

Πρόταση 2.7 (Προσθετικότητα) *Έστω $a \leq c \leq b$. Αν $f \in \mathfrak{R}[a,c]$ και $f \in \mathfrak{R}[c,b]$ τότε $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ και*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Γενικότερα, αν $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ και $f \in \mathfrak{R}[x_{i-1}, x_i]$ για κάθε i, τότε $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ και

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

Απόδειξη (του πρώτου ισχυρισμού) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < c < b$ (αν $c = a$ ή $c = b$, δεν υπάρχει τίποτε ν'αποδείξουμε).

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού $f \in \mathfrak{R}[a,c]$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{Q}_n$ του $[a,c]$ ώστε

$$U(f, \mathcal{Q}_n) - L(f, \mathcal{Q}_n) < \frac{1}{n} \text{ και άρα } U(f, \mathcal{Q}_n) - \int_a^c f < \frac{1}{n}.$$

Επίσης, αφού $f \in \mathfrak{R}[c,b]$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{R}_n$ του $[c,b]$ ώστε

$$U(f, \mathcal{R}_n) - L(f, \mathcal{R}_n) < \frac{1}{n} \text{ και άρα } U(f, \mathcal{R}_n) - \int_c^b f < \frac{1}{n}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι η $\mathcal{P}_n \equiv \mathcal{Q}_n \cup \mathcal{R}_n$ είναι διαμέριση του $[a,c] \cup [c,b] = [a,b]$ και ότι

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}_n) &= U(f, \mathcal{Q}_n) + U(f, \mathcal{R}_n) \\ L(f, \mathcal{P}_n) &= L(f, \mathcal{Q}_n) + L(f, \mathcal{R}_n). \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0$$

άρα, από το Πόρισμα 2.5 το $\int_a^b f$ υπάρχει και

$$\int_a^b f = \lim_n U(f, \mathcal{P}_n) = \lim_n U(f, \mathcal{Q}_n) + \lim_n U(f, \mathcal{R}_n) = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \square$$

Ορισμός 2.2 *Αν* $a < b$ *και* $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, *ορίζουμε*

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Παρατήρηση 2.8 Με τον Ορισμό 2.2, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η Πρόταση 2.7 επεκτείνεται ως εξής:
Αν $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ *τότε για κάθε* $x, y, z \in [a,b]$ *(ανεξάρτητα από τη διάταξή τους)*

$$\int_x^y f + \int_y^z f = \int_x^z f.$$

Πρόταση 2.9 *Έστω* $a \le c \le d \le b$. *Αν* $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ *τότε* $f \in \mathfrak{R}[c,d]$.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σημεία c, d ανήκουν στην $\mathcal{P}$ (γιατί, αν τα επισυνάψουμε στην $\mathcal{P}$, η διαφορά $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})$ δεν θα μεγαλώσει (Πρόταση 2.1)). Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \ldots < t_k = c < \ldots < t_j = d < \ldots < t_n = b\}.$$

Έχουμε

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon. \tag{2}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap [c,d] = \{c = t_k < t_{k+1} < \ldots < t_j = d\}$$

είναι διαμέριση του $[c,d]$ και ότι

$$U(f,\mathcal{Q}) - L(f,\mathcal{Q}) = \sum_{i=k+1}^{j} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

γιατί όλοι οι προσθετέοι στο άθροισμα (2) είναι μη αρνητικοί. Από το κριτήριο Riemann, το ολοκλήρωμα $\int_c^d f$ υπάρχει. $\square$

Πρόταση 2.10 (γραμμικότητα) *Αν* $f, g \in \mathfrak{R}[a,b]$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$ *τότε* $f + \lambda g \in \mathfrak{R}[a,b]$ *και*

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι

$$(\mathbf{i})\ f+g \in \Re[a,b] \qquad \text{και} \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$(\mathbf{ii})\ \lambda f \in \Re[a,b] \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

(**i**) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_n$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n) < 1/2n$ και[2] $U(g,\mathcal{P}_n) - L(g,\mathcal{P}_n) < 1/2n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}_n) + L(g,\mathcal{P}_n) &= \sum (m_i(f) + m_i(g))(t_i - t_{i-1}) \\ U(f,\mathcal{P}_n) + U(g,\mathcal{P}_n) &= \sum (M_i(f) + M_i(g))(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Παρατήρησε όμως ότι[3]

$$m_i(f) + m_i(g) \le m_i(f+g), \quad \text{άρα} \quad L(f,\mathcal{P}_n) + L(g,\mathcal{P}_n) \le L(f+g,\mathcal{P}_n).$$

$$\begin{aligned} [\text{Πράγματι,} \quad m_i(f) + m_i(g) &= \inf\{f(s) : s \in [t_{i-1},t_i]\} + \inf\{g(t) : t \in [t_{i-1},t_i]\} \\ &= \inf\{f(s) + g(t) : s,t \in [t_{i-1},t_i]\} \\ &\le \inf\{f(s) + g(s) : s \in [t_{i-1},t_i]\} = m_i(f+g).\,] \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$M_i(f) + M_i(g) \ge M_i(f+g) \quad \text{άρα} \quad U(f,\mathcal{P}_n) + U(g,\mathcal{P}_n) \ge U(f+g,\mathcal{P}_n).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}_n) + L(g,\mathcal{P}_n) &\le L(f+g,\mathcal{P}_n) \le U(f+g,\mathcal{P}_n) \\ &\le U(f,\mathcal{P}_n) + U(g,\mathcal{P}_n) \le L(f,\mathcal{P}_n) + L(g,\mathcal{P}_n) + \frac{1}{n} \quad (3) \end{aligned}$$

άρα

$$0 \le U(f+g,\mathcal{P}_n) - L(f+g,\mathcal{P}_n) \le \frac{1}{n}$$

[2]Πράγματι: υπάρχουν $\mathcal{Q}_n$ και $\mathcal{R}_n$ ώστε $U(f,\mathcal{Q}_n) - L(f,\mathcal{Q}_n) < 1/2n$ και $U(g,\mathcal{R}_n) - L(g,\mathcal{R}_n) < 1/2n$. Η $\mathcal{P}_n = \mathcal{Q}_n \cup \mathcal{R}_n$ ικανοποιεί και τις δύο ανισότητες.

[3]Ισότητα γενικά δεν ισχύει: για παράδειγμα αν $f(x) = x$ και $g(x) = 1-x$ στο $[0,1]$, τότε $m(f) = m(g) = 0$ άρα $m(f) + m(g) = 0$ ενώ $f + g = 1$ άρα $m(f+g) = 1$.

οπότε $\lim_n (U(f+g,\mathcal{P}_n) - L(f+g,\mathcal{P}_n)) = 0$ και συνεπώς από το Πόρισμα 2.5 του κριτηρίου Riemann το $\int(f+g)$ υπάρχει και ισούται με το όριο $\lim_n L(f+g,\mathcal{P}_n)$. Όμως από την (3) έχουμε

$$L(f,\mathcal{P}_n) + L(g,\mathcal{P}_n) \leq L(f+g,\mathcal{P}_n) \leq L(f,\mathcal{P}_n) + L(g,\mathcal{P}_n) + \frac{1}{n}$$

άρα (αφού τα όρια $\lim_n L(f,\mathcal{P}_n)$ και $\lim_n L(g,\mathcal{P}_n)$ υπάρχουν)

$$\lim_n L(f+g,\mathcal{P}_n) = \lim_n L(f,\mathcal{P}_n) + \lim_n L(g,\mathcal{P}_n)$$

δηλαδή $$\int(f+g) = \int f + \int g.$$

(**ii**) Για να δείξουμε ότι το $\int \lambda f$ υπάρχει και ότι $\int \lambda f = \lambda \int f$, εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\lambda > 0$. Τότε

$$m_i(\lambda f) = \inf\{\lambda f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} = \lambda \inf\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} = \lambda m_i(f)$$

και ομοίως $M_i(\lambda f) = \lambda M_i(f)$, άρα για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$,

$$L(\lambda f,\mathcal{P}) = \lambda L(f,\mathcal{P}) \quad \text{και} \quad U(\lambda f,\mathcal{P}) = \lambda U(f,\mathcal{P}).$$

Αν λοιπόν δοθεί $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ ώστε $U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon/\lambda$ και έχουμε $U(\lambda f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(\lambda f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$, άρα το $\int \lambda f$ υπάρχει.

Από την άλλη μεριά όμως, για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ έχουμε

$$L(\lambda f,\mathcal{P}) = \lambda L(f,\mathcal{P}) \leq \lambda \int f \leq \lambda U(f,\mathcal{P}) = U(\lambda f,\mathcal{P})$$

και επειδή το $\int \lambda f$ είναι ο μόνος αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα

$$L(\lambda f,\mathcal{P}) \leq \int \lambda f \leq U(\lambda f,\mathcal{P})$$

για όλες τις διαμερίσεις, αναγκαστικά θα έχουμε $\lambda \int f = \int \lambda f$.

Για την περίπτωση $\lambda < 0$ εργαζόμαστε ανάλογα παρατηρώντας ότι

$$m_i(\lambda f) = \inf\{\lambda f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} = \lambda \sup\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} = \lambda M_i(f)$$
$$\text{και} \quad M_i(\lambda f) = \lambda m_i(f). \qquad \square$$

Για τα επόμενα, θα χρειασθεί μια παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.11 *Αν* $f : [a,b] \to [m,M]$ *τότε για κάθε* $s,t \in [a,b]$ *έχουμε* $|f(s) - f(t)| \leq M - m$.

Πράγματι, επειδή $f(s) \leq M$ και $f(t) \geq m$ έχουμε $f(s) - f(t) \leq M - f(t) \leq M - m$ και αλλάζοντας τα s και t έχουμε ομοίως $f(t) - f(s) \leq M - m$.

Πρόταση 2.12 *Αν* $f, g \in \Re[a,b]$ *τότε* $f.g \in \Re[a,b]$.

Απόδειξη Έστω $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P} = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ και κάθε $s,t \in [t_{i-1}, t_i]$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(s)g(s) - f(t)g(t) &= f(s)(g(s) - g(t)) + (f(s) - f(t))g(t) \\ &\leq |f(s)|.|g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)|.|g(t)| \\ &\leq \|f\|(M_i(g) - m_i(g)) + (M_i(f) - m_i(f))\|g\| \equiv K_i \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την Παρατήρηση). Επομένως, παίρνοντας supremum ως προς $s \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$M_i(fg) - f(t)g(t) \leq K_i \;\Rightarrow\; M_i(fg) - K_i \leq f(t)g(t)$$

για κάθε $t \in [t_{i-1}, t_i]$, άρα παίρνοντας infimum ως προς $t \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$M_i(fg) - K_i \leq m_i(fg) \;\Rightarrow\; M_i(fg) - m_i(fg) \leq K_i\,.$$

Δείξαμε ότι

$$M_i(fg) - m_i(fg) \leq \|f\|(M_i(g) - m_i(g)) + (M_i(f) - m_i(f))\|g\|$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα

$$U(fg, \mathcal{P}) - L(fg, \mathcal{P}) \leq \|f\|(U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P})) + (U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}))\|g\|.$$

Αν λοιπόν δοθεί $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε μια διαμέριση $\mathcal{P}_1$ ώστε $U(g, \mathcal{P}_1) - L(g, \mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$ (ύπαρξη του $\int_a^b g$) και μια διαμέριση $\mathcal{P}_2$ ώστε $U(f, \mathcal{P}_2) - L(f, \mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2\|g\|}$ (ύπαρξη του $\int_a^b f$) και θεωρώντας την κοινή εκλέπτυνση $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ έχουμε από την προηγούμενη ανισότητα $U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

Πρόταση 2.13 (Θετικότητα) *Αν* $f \in \Re[a,b]$ *και* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$ *τότε* $\int_a^b f \geq 0$.

Απόδειξη Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ έχουμε $L(f,\mathcal{P}) \geq 0$ εφόσον $m_i(f) \geq 0$ και άρα
$$\int_a^b f \geq L(f,\mathcal{P}) \geq 0.$$

Πόρισμα 2.14 *Αν $f, g \in \Re[a,b]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.*

Απόδειξη Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση στη μη αρνητική συνάρτηση $h = f - g$ έχουμε $\int_a^b (f-g) \geq 0$. Αλλά από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι $\int_a^b (a-b) = \int_a^b f - \int_a^b g$.

Πρόταση 2.15 *Αν $f \in \Re[a,b]$ τότε $|f| \in \Re[a,b]$ και*
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Απόδειξη *Πρέπει πρώτα να αποδείξουμε την ύπαρξη του* $\int_a^b |f|$: Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$, κάθε i και κάθε $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ έχουμε
$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i(f) - m_i(f),$$
από την Παρατήρηση 2.11. Παίρνοντας supremum ως προς x και μετά infimum ως προς y (όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.12) βρίσκουμε
$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \leq M_i(f) - m_i(f).$$
Έπεται ότι
$$U(|f|,\mathcal{P}) - L(|f|,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}).$$
Επομένως, αν δοθεί $\varepsilon > 0$, διαλέγοντας διαμέριση $\mathcal{P}$ ώστε $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$, θα έχουμε $U(|f|,\mathcal{P}) - L(|f|,\mathcal{P}) < \varepsilon$ και άρα το $\int_a^b |f|$ υπάρχει.

Τώρα, επειδή
$$-|f|(t) \leq f(t) \leq |f|(t) \quad \text{για κάθε } t \in [a,b]$$
έπεται από το Πόρισμα 2.14 ότι
$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$
άρα $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Πόρισμα 2.16 *Αν* $f \in \Re[a,b]$ *και* $m \le f(x) \le M$ *για κάθε* $x \in [a,b]$ *τότε*

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

Επίσης

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \le \|f\|(b-a)$$

όπου $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$.

Απόδειξη Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.14: από την ανισότητα $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$ και από την $|f(x)| \le \|f\|$ για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $\int_a^b |f| \le \|f\|(b-a)$.