3 Ολοκληρωσιμότητα

Θεώρημα 3.1 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση τότε είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη Αν η $-f$ είναι ολοκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει για την f (Πρόταση 2.10). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα (αν όχι, θεωρούμε την $-f$).

Κατ'αρχήν έχουμε $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ για κάθε x άρα η f είναι φραγμένη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$,

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = f(t_{i-1})$$
$$\text{και} \quad M_i(f) = f(t_i).$$

Επομένως

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \quad \text{και} \quad U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\text{άρα} \quad U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}).$$

Θεωρούμε τώρα μια διαμέριση του $[a,b]$ σε n ίσα τμήματα, οπότε $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ για κάθε i. Τότε

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1}))\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}.$$

Αρκεί επομένως, αν δοθεί $\varepsilon > 0$, να διαλέξουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} < \varepsilon$, οπότε για την αντίστοιχη διαμέριση $\mathcal{P}$ θα έχουμε $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$ και το συμπέρασμα έπεται από το Κριτήριο Riemann.

Παράδειγμα 3.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(όπου $a > 0$) με* $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Η f είναι φθίνουσα, άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει. Για να το υπολογίσουμε, θεωρούμε μια τυχαία διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$. Αφού $\frac{1}{t_i} \leq \frac{1}{t_{i-1}}$ έχουμε

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i^2}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_{i-1}^2}(t_i - t_{i-1}) = U(f,\mathcal{P}).$$

Αλλά
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_{i-1}} - \frac{1}{t_i} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$
άρα
$$L(f, \mathcal{P}) \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leq U(f, \mathcal{P}).$$
Αφού η διαμέριση $\mathcal{P}$ είναι τυχαία, και το $\int_a^b f$ είναι ο μόνος αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα αυτή για κάθε $\mathcal{P}$, έπεται ότι $\int_a^b f = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Πόρισμα 3.3 *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα μονότονη (δηλαδή υπάρχει διαμέριση $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε η $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ να είναι μονότονη για κάθε i), τότε είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 3.1, το $\int_{xi-1}^{x_i} f$ υπάρχει για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς το $\int_a^b f$ υπάρχει από την Πρόταση 2.7.

Παρατήρηση 3.4 Από το πόρισμα προκύπτει ότι *οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις* (σε κλειστά και φραγμένα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους) είναι ολοκληρώσιμες.

Το πόρισμα όμως δεν εφαρμόζεται σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις: Για παράδειγμα η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ όταν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα της μορφής $[0, a]$ (απόδειξη: άσκηση!). Για να δείξουμε ότι *κάθε* συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, θα χρειασθούμε την ισχυρότερη έννοια της *ομοιόμορφης συνέχειας*.

3.1 Ομοιόμορφη συνέχεια

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνέχειας:

Ορισμός 3.1 *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ (όπου $A \subseteq \mathbb{R}$) είναι* ***συνεχής στο*** *A αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $t \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $s \in A$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Το δ συνήθως εξαρτάται όχι μόνον από το ε αλλά και από το t:

Παράδειγμα 3.5 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x^2$.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Ας θυμηθούμε την απόδειξη:

Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ ΚΑΙ $t \in [0, +\infty)$, ψάχνουμε για ένα κατάλληλο $\delta > 0$. Είναι βολικό να αναζητήσουμε $\delta < 1$ (αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ που να ικανοποιεί τον ορισμό 3.1, θα υπάρχει και κάποιο $\delta \in (0,1)$). Αν τώρα $|s-t| < \delta$ τότε $|s| < |t| + \delta < t+1$, οπότε

$$|f(s) - f(t)| = |s-t|.|s+t| < \delta(|s| + |t|) < \delta(2t+1)$$

επομένως για να εξασφαλίσουμε ότι $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ αρκεί να διαλέξουμε

$$\delta \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2t+1}, 1\} \tag{1}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Παρατηρούμε εδώ ότι δεν υπάρχει ένα θετικό δ που να ικανοποιεί την ανισότητα (1) για όλα τα $t \in \mathbb{R}$ (αφού το δεξί σκέλος της τείνει στο 0 καθώς $t \to \infty$). Μήπως όμως υπάρχει ένα $\delta > 0$ που ικανοποιεί τον ορισμό 3.1 (με δεδομένο $\varepsilon > 0$) για κάθε t; Όχι. Γιατί αν υπήρχε, τότε για κάθε $t > 0$ θέτοντας $s = t + \frac{\delta}{2}$ θα είχαμε

$$|f(s) - f(t)| = (t + \frac{\delta}{2})^2 - t^2 = t\delta + \delta^2 < \varepsilon$$

πράγμα αδύνατο, εφόσον καθώς $t \to \infty$ έχουμε ότι $t\delta + \delta^2 \to +\infty$ όποιο και να είναι το δ (αρκεί να είναι θετικό), οπότε δεν είναι δυνατόν να ισχύει $t\delta + \delta^2 < \varepsilon$ για κάθε $t > 0$ (πάρε π.χ. $t = \frac{\varepsilon}{\delta}$).

Ας παρατηρήσουμε ότι στο παράδειγμα αυτό το πεδίο ορισμού της f δεν είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 3.6 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής σ'όλο το $(0,1)$, αλλά και πάλι δεν υπάρχει ενιαίο θετικό δ που να ικανοποιεί τον ορισμό 3.1 για κάθε $t \in (0,1)$ (με δεδομένο $\varepsilon > 0$). Παραδείγματος χάριν, αν $t_n = \frac{1}{n}$ και $s_n = \frac{1}{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) τότε, ενώ η διαφορά $|t_n - s_n| = \frac{1}{2n}$ τείνει στο 0, η διαφορά $|f(t_n) - f(s_n)| = n$ δεν μικραίνει.

Σ'αυτό το παράδειγμα το πεδίο ορισμού της f είναι φραγμένο, αλλά όχι κλειστό.

[*Σημείωση* Αν νομίζεις ότι το πρόβλημα με το τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η f δεν είναι φραγμένη, μπορείς να πειραματισθείς με την $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ όπου $g(x) = \sin\frac{1}{x}$.]

Παράδειγμα 3.7 *$f : A \to \mathbb{R}$ με $|f(s) - f(t)| \leq 2|s - t|$ για κάθε $s, t \in A$.*

Εδώ, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $t \in A$, αν διαλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (ανεξάρτητο του t!!), τότε για κάθε $s \in A$ και $|s - t| < \delta$ θα έχουμε $|f(s) - f(t)| < 2\delta = \varepsilon$.

Όταν η «επιτρεπτή μεταβολή» δ εξαρτάται μόνον από το ε, είναι δηλαδή *ομοιόμορφη* σ'όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε η συνάρτηση λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής*:

Ορισμός 3.2 *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται* ***ομοιόμορφα συνεχής στο*** *A αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε
αν $t, s \in A$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις 3.8 ***(α)*** *Αν μια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A τότε βεβαίως είναι συνεχής, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, όπως είδαμε στα πρώτα δύο παραδείγματα.*
(β) *Σε αντίθεση με την απλή συνέχεια, η ομοιόμορφη συνέχεια είναι* ολική *έννοια, αναφέρεται δηλαδή σ'ολόκληρο το σύνολο A κι όχι σε κάθε σημείο του χωριστά.*
(γ) *Στον ορισμό 3.2, τα s και t έχουν ισοδύναμους ρόλους. Δηλαδή στην ομοιόμορφη συνέχεια υπεισέρχονται κατά κάποιον τρόπο «δύο μεταβλητές».*

Η ομοιόμορφη συνέχεια είναι θεμελιώδης έννοια. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μόνον το ακόλουθο βασικό

Θεώρημα 3.9 *Αν η f είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.*[1]

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε για κάθε ζεύγος σημείων $t, s \in [a, b]$ με $|t - s| < \delta$ να ισχύει $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\delta > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Η υπόθεσή μας σημαίνει ότι κανένα δ της μορφής $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ δεν είναι κατάλληλο για όλα τα σημεία του $[a, b]$. Δηλαδή

$$\text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ υπάρχουν } t_n, s_n \in [a, b] \text{ με } |s_n - t_n| < \frac{1}{n} \text{ αλλά } |f(t_n) - f(s_n)| \geq \varepsilon.$$

[1] Το παράδειγμα 3.7 δείχνει ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι ομοιόμορφα συνεχής, χωρίς το πεδίο ορισμού της να είναι κλειστό ή φραγμένο.

Έχουμε έτσι δυο ακολουθίες (s_n), (t_n) στο $[a,b]$. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $k_1 < k_2 < \ldots$ φυσικών αριθμών ώστε οι αντίστοιχες υπακολουθίες (s_{k_n}) και (t_{k_n}) να είναι *και οι δυο* συγκλίνουσες. Πράγματι: Αφού η (s_n) είναι φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass (!) έχει μια υπακολουθία $(s_n)_{n\in M}$ που συγκλίνει[2], έστω στο s. Θεωρώ τώρα την αντίστοιχη υπακολουθία $(t_n)_{n\in M}$ της $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Και αυτή είναι φραγμένη, επομένως έχει μια υπακολουθία (t_{k_n}) που συγκλίνει, έστω στο t. Η αντίστοιχη ακολουθία (s_{k_n}) είναι υπακολουθία της $(s_n)_{n\in M}$ (γιατί οι δείκτες $k_1 < k_2 < \ldots$ ανήκουν στο σύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$), επομένως συγκλίνει και αυτή στο s. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε μόνον ότι το $[a,b]$ είναι φραγμένο. Επειδή όμως είναι και κλειστό, έπεται ότι τα όρια $s = \lim_n s_{k_n}$ και $t = \lim_n t_{k_n}$ ανήκουν στο $[a,b]$ (εφόσον όλα τα s_{k_n} και t_{k_n} ανήκουν στο $[a,b]$).

Επιπλέον, αφού $|s_{k_n} - t_{k_n}| < \frac{1}{k_n}$ για κάθε n οι δύο ακολουθίες θα τείνουν αναγκαστικά στο ίδιο όριο, δηλαδή $s = t$.

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο αυτό, άρα $f(s_{k_n}) \to f(s)$ και $f(t_{k_n}) \to f(s)$, οπότε $|f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \to 0$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την ανισότητα $|f(t_{k_n}) - f(s_{k_n})| \geq \varepsilon$, που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.2 Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 3.10 *Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ υπάρχει.*

Απόδειξη Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $s,t \in [a,b]$ και $|s-t| < \delta$ τότε $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Αν λοιπόν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση[3] του $[a,b]$ ώστε $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ για κάθε k, τότε για κάθε $s,t \in [t_{k-1}, t_k]$ θα έχουμε $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, και άρα $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Επομένως

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \square$$

[2] εδώ το M είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, με την φυσική του διάταξη

[3] υπάρχει τέτοια διαμέριση, π.χ. σε n ίσα τμήματα, με $n > \frac{b-a}{\delta}$

Θεώρημα 3.11 (Μέσης Τιμής) *Αν* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη με* $g(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$, *τότε υπάρχει* $\xi \in [a,b]$ *ώστε*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Ειδικότερα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ *ώστε*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_a^b g > 0$ (αν $\int g = 0$, το συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε ξ). Αν $m = \inf\{f(t) : t \in [a,b]\}$ και $M = \sup\{f(t) : t \in [a,b]\}$ έχουμε για κάθε $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} & m \leq f(t) \leq M \\ & mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t) \qquad (g(t) \geq 0) \\ \text{άρα} \qquad & m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g \end{aligned}$$

από το Πόρισμα 2.14. Δηλαδή

$$\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \in [m, M].$$

Αφού η f είναι συνεχής, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

Παρατήρηση 3.12 Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι στο τελευταίο Θεώρημα η υπόθεση $g \geq 0$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ όπου $f(x) = x^2$ και $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in [0,1] \\ 2 & \text{αν } x \in (1,2] \end{cases}$ τότε $\int_0^2 g = 1$ και $\int_0^2 fg = \frac{13}{3}$ άρα $\frac{\int fg}{\int g} = \frac{13}{3} > 4$ ενώ $0 \leq f(\xi) \leq 4$ για κάθε $\xi \in [0,2]$.

Θεώρημα 3.13 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και g ορισμένη και συνεχής στο $[m,M]$ όπου $M = \sup\{f(s) : s \in [a,b]\}$ και $m = \inf\{f(s) : s \in [a,b]\}$. Τότε η σύνθεση $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Σημείωση Υπάρχουν παραδείγματα που δείχνουν ότι δεν είναι αρκετό η g να είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη Θεωρήματος Θέτουμε $h = g \circ f$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής (Θεώρημα 3.9), υπάρχει $\delta > 0$ (και μπορώ χωρίς βλάβη της γενικότητας να πάρω $\delta \le \varepsilon$) ώστε αν $x, y \in [m,M]$ και $|x-y| < \delta$ να έχουμε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ τότε

$$U(h,\mathcal{P}) - L(h,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k(h) - m_k(h))(t_k - t_{k-1}).$$

Η ιδέα είναι να χωρίσουμε τα διαστήματα σε «καλά» και «κακά»: στα «καλά» διαστήματα η μεταβολή της f να είναι το πολύ δ και (θα διαλέξουμε τη διαμέριση ώστε) τα υπόλοιπα διαστήματα να έχουν «μικρό» συνολικό μήκος. Συγκεκριμένα, έστω $G \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ το σύνολο δεικτών k για τους οποίους το διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ έχει την ιδιότητα [4] $|f(s) - f(t)| < \delta$ για κάθε $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$ και B το σύνολο των υπολοίπων δεικτών.

Αν $k \in G$, τότε για κάθε $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$ έχουμε $|f(s) - f(t)| < \delta$ άρα $|h(s) - h(t)| = |g(f(s)) - g(f(t))| < \varepsilon$ (από τη συνέχεια της g) και συνεπώς $M_k(h) - m_k(h) \le \varepsilon$, οπότε

$$\sum_{k \in G} (M_k(h) - m_k(h))(t_k - t_{k-1}) \le \varepsilon \sum_{k \in G} (t_k - t_{k-1}) \le \varepsilon(b-a). \tag{2}$$

Αν πάλι $j \in B$, τότε υπάρχουν $s, t \in [t_{j-1}, t_j]$ ώστε $|f(s) - f(t)| \ge \delta$ οπότε $M_j(f) - m_j(f) \ge \delta$. Επομένως

$$\sum_{j \in B} (M_j(f) - m_j(f))(t_j - t_{j-1}) \ge \delta \sum_{j \in B} (t_j - t_{j-1}).$$

Εφόσον όμως η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ μπορούμε να επιλέξουμε την $\mathcal{P}$ ώστε $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \delta^2$, οπότε

$$\begin{aligned}
\delta \sum_{j \in B} (t_j - t_{j-1}) &\le \sum_{j \in B} (M_j(f) - m_j(f))(t_j - t_{j-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) - m_k(f))(t_k - t_{k-1}) < \delta^2
\end{aligned}$$

[4] μπορεί βέβαια κανένα διάστημα της $\mathcal{P}$ να μην έχει την ιδιότητα αυτή, οπότε $G = \emptyset$

άρα

$$\sum_{j\in B}(t_j - t_{j-1}) < \delta. \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι $M_j(h) - m_j(h) \leq 2\sup\{|h(x)| : x \in [m, M]\} = 2\|h\|$, έχουμε λοιπόν από τις (2) και (3)

$$\begin{aligned}
U(h,\mathcal{P}) - L(h,\mathcal{P})& \\
&= \sum_{k\in G}(M_k(h) - m_k(h))(t_k - t_{k-1}) + \sum_{j\in B}(M_j(h) - m_j(h))(t_j - t_{j-1}) \\
&\leq \varepsilon(b-a) + 2\|h\|\sum_{j\in B}(t_j - t_{j-1}) < \varepsilon(b-a) + 2\|h\|\delta \\
&\leq \varepsilon(b - a + 2\|h\|).
\end{aligned}$$

Πόρισμα 3.14 *Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε οι $|f|$ και f^n ($n \in \mathbb{N}$) είναι ολοκληρώσιμες. Αν επιπλέον υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \geq \delta$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη Έχουμε $|f| = g_1 \circ f$, $f^n = g_2 \circ f$ και $\frac{1}{f} = g_3 \circ f$ όπου g_1, g_2, g_3 οι συνεχείς συναρτήσεις $g_1(x) = |x|$, $g_2(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) και $g_3(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq \delta$.