# 4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

## 4.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Στην παράγραφο αυτή, μια συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ θα ονομάζεται **διαφορίσιμη στο** $[a, b]$ αν η $F'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$F'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \quad \text{και} \quad F'_-(b) \lim_{x \to b-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} .$$

Γράφουμε για συντομία $F'(a) = F'_+(a)$ και $F'(b) = F'_-(b)$.

Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη και σε κάθε υποδιάστημα $[a, x]$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμά της ως συνάρτηση του άνω άκρου ολοκλήρωσης:

**Ορισμός 4.1** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Το* ***αόριστο ολοκλήρωμα της*** *$f$ είναι η συνάρτηση*

$$\begin{aligned} F &: [a, b] \to \mathbb{R} \\ F(x) &= \int_a^x f. \end{aligned}$$

Τονίζουμε ότι ενώ το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ είναι αριθμός, το αόριστο ολοκλήρωμα είναι συνάρτηση στο $[a, b]$.

**Παρατήρηση 4.1** Η ανισότητα

$$\left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \|f\| \, |y - x| \qquad (x, y \in [a, b])$$

(όπου $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$) δείχνει ότι, όταν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο $[a, b]$. Όταν όμως η $f$ είναι συνεχής, η $F$ είναι όχι μόνον συνεχής, αλλά παραγωγίσιμη:

**Θεώρημα 4.2 (Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)** *Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας* ***συνεχούς*** *συνάρτησης είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, με παράγωγο ίση με τη συνάρτηση.*

*Γενικότερα:*

*Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη και $F(x)=\int_a^x f$. Αν η $f$ είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_o\in[a,b]$, τότε η $F$ είναι διαφορίσιμη στο $x_o$ και $F'(x_o)=f(x_o)$. Επομένως αν η $f$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η $F$ είναι διαφορίσιμη στο $[a,b]$ και $F'(x)=f(x)$.*

**Απόδειξη** Για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε (εφόσον $x-x_o=\int_{x_o}^x 1dt$)

$$F(x)-F(x_o)-f(x_o)(x-x_o)=\int_{x_o}^x f(t)dt-f(x_o)\int_{x_o}^x dt=\int_{x_o}^x\left(f(t)-f(x_o)\right)dt.$$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_o$, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x\in[a,b]$ και $|x-x_o|<\delta$ ισχύει $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$. Συνεπώς για κάθε $t$ μεταξύ $x_o$ και $x$ έχουμε $|t-x_o|<\delta$ και άρα $|f(t)-f(x_o)|<\varepsilon$. Επομένως

$$\left|\int_{x_o}^x\left(f(t)-f(x_o)\right)dt\right|\leq\varepsilon|x-x_o|.$$

Έπεται ότι αν $x\in[a,b]$ και $0<|x-x_o|<\delta$ τότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}-f(x_o)\right| &= \frac{1}{|x-x_o|}\left|\int_{x_o}^x\left(f(t)-f(x_o)\right)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x-x_o|}\varepsilon|x-x_o|=\varepsilon. \qquad (1)\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon>0$ είναι αυθαίρετο, αν $x_o\in(a,b)$ η (1) δείχνει ότι το όριο

$$F'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}$$

υπάρχει και ισούται με $f(x_o)$.

Στην περίπτωση $x_o=a$, επειδή $x\in[a,b]$, έχουμε $x>x_o=a$ και άρα η (1) δείχνει ότι το πλευρικό όριο

$$\lim_{x\searrow x_o}\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}=f(x_o)$$

με άλλα λόγια ότι $F'_+(x_o)=f(x_o)$. Ομοίως, όταν $x_o=b$, τότε $F'_-(x_o)=f(x_o)$.

**Παρατήρηση 4.3** *Από το Θεώρημα έπεται ότι, αν $F$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ (εφόσον $F(a) = 0$).*

• *Γενικότερα, αν $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση (δηλαδή η $G'$ υπάρχει και είναι συνεχής) τότε ικανοποιεί τη σχέση*

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a). \tag{2}$$

**Απόδειξη** Θέτουμε $F(x) = \int_a^x G'(t)dt$. Εφόσον η $G'$ είναι συνεχής, από το Θεώρημα 4.2 η $F$ είναι διαφορίσιμη και $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αυτό συνεπάγεται, όπως έχουμε δείξει, ότι η διαφορά $G(x) - F(x)$ είναι σταθερή στο $[a,b]$. Εφόσον $F(a) = 0$, έχουμε

$$\int_a^b G' = F(b) - F(a) = G(b) - G(a). \qquad \square$$

• *Δεν είναι όμως εν γένει αλήθεια ότι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση (2).*

Μπορεί παραδείγματος χάριν η παράγωγος να μην είναι ολοκληρώσιμη: Αν

$$G : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

τότε η $G'$ υπάρχει στο $[0,1]$ και εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$G'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Αλλά η $G'$ δεν είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη.

• *Μένει να εξετασθεί η περίπτωση που η $G'$ είναι απλώς ολοκληρώσιμη (και όχι κατ'ανάγκην συνεχής).*

Είναι αξιοσημείωτο ότι και πάλι ισχύει η σχέση (2). Η απόδειξη όμως στην περίπτωση αυτή είναι τελείως διαφορετική, καθώς δεν μπορούμε να επικαλεσθούμε το Θεώρημα 4.2.

**Θεώρημα 4.4 (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)** *Έστω $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν η $G'$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε*

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a).$$

**Απόδειξη** Έστω $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ μια τυχαία διαμέριση του $[a, b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε $[t_{i-1}, t_i]$, βρίσκουμε $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ώστε $G(t_i) - G(t_{i-1}) = G'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$. Εφόσον $m_i(G') \leq G'(\xi_i) \leq M_i(G')$ έχουμε (με τους συμβολισμούς της παραγράφου 2)

$$L(G', \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{n} G'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \leq U(G', \mathcal{P}).$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^{n} G'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (G(t_i) - G(t_{i-1})) = G(b) - G(a)$$

άρα

$$L(G', \mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq U(G', \mathcal{P}).$$

Όμως (αφού η $G'$ είναι ολοκληρώσιμη) το $\int_a^b G'$ είναι *ο μοναδικός* αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα αυτή για κάθε $\mathcal{P}$, επομένως $\int_a^b G' = G(b) - G(a)$. $\square$

Το Θεώρημα 4.2 λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ είναι η παράγωγος κάποιας συνάρτησης. Μια τέτοια συνάρτηση είναι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f$. Η $F$ είναι η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες $F' = f$ και $F(a) = 0$. Πράγματι, αν κάποια άλλη διαφορίσιμη συνάρτηση $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει αυτές τις δύο ιδιότητες, η ισότητα $G'(x) = F'(x)$ δείχνει ότι οι $G$ και $F$ διαφέρουν κατά σταθερά, και η σχέση $G(a) = 0 = F(a)$ δείχνει ότι αυτή η σταθερά είναι 0.

Αποδείξαμε το

**Πόρισμα 4.5** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $F(x) = \int_a^x f$. Αν $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια άλλη συνάρτηση, τότε*
$G = F \iff$ *η $G$ είναι διαφορίσιμη, $G' = f$ και $G(a) = 0$.*

Ποιές άλλες συναρτήσεις $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα $H' = f$?

**Ορισμός 4.2** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.* ***Παράγουσα*** *ή* ***αντιπαράγωγος*** *της $f$ λέγεται κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $H' = f$.*

**Παρατήρηση 4.6** *Αν η $f$ δεν είναι συνεχής στο $[a,b]$, δεν υπάρχει πάντα διαφορίσιμη συνάρτηση $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $H' = f$. Ένα παράδειγμα είναι η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, θα ήταν συνεχής, άρα θα ελάμβανε ελάχιστη τιμή, δηλ. θα υπήρχε $\xi \in [a,b]$ με $H(\xi) = \min\{H(t) : t \in [0,1]\}$. Εφόσον $H'(0) = f(0) = -1 < 0$, η τιμή $H(0)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστη[1]. Εφόσον $H'(1) = f(1) = 1$, ούτε η τιμή $H(1)$ μπορεί να είναι ελάχιστη[2]. Αυτό σημαίνει ότι $0 \neq \xi \neq 1$, άρα $\xi \in (0,1)$. Από το Θεώρημα του Fermat έπεται τώρα ότι $f(\xi) = H'(\xi) = 0$, άτοπο.

**Πόρισμα 4.7** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.*
*Μια συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της $f$ αν και μόνον αν η $G$ είναι διαφορίσιμη και υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $G(x) = \int_a^x f + c$.*

**Απόδειξη** Αν $G(x) = \int_a^x f + c$, τότε από το Θεώρημα 4.2 η $G$ είναι διαφορίσιμη και $G' = f$.

Αν η $G$ είναι διαφορίσιμη και $G' = f$, τότε από το Θεώρημα 4.4

$$F(x) \equiv \int_a^x f = \int_a^x G' = G(x) - G(a)$$

άρα η συνάρτηση $G - F$ ισούται με τη σταθερά $G(a)$.

**Παρατήρηση 4.8** *Η μέθοδος απόδειξης του Θεωρήματος 4.2 μπορεί να δώσει και μια απόδειξη του θεωρήματος ότι*

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη
*χωρίς να χρησιμοποιηθεί η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας.*

**Απόδειξη** Υπενθυμίζουμε ότι η $f$ είναι φραγμένη (αφού είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα). Συνεπώς σε κάθε $[a,x]$ *τα κάτω και άνω ολοκληρώματα υπάρχουν.* Ορίζουμε τις συναρτήσεις $A, K : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$K(x) = \underline{\int_a^x} f, \qquad A(x) = \overline{\int_a^x} f$$

[1] γιατί υπάρχει $x > 0$ ώστε $\frac{H(x)-H(0)}{x-0} < -\frac{1}{2}$
[2] γιατί υπάρχει $x < 1$ ώστε $\frac{H(x)-H(1)}{x-1} > \frac{1}{2}$

(εξ ορισμού $A(a) = K(a) = 0$). Φυσικά έχουμε $K(x) \le A(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι $K', A'$ υπάρχουν και είναι ίσες. Γιατί τότε οι $K$ και $A$ θα πρέπει να διαφέρουν κατά σταθερά, και άρα $K(b) - K(a) = A(b) - A(a)$, δηλαδή $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Σταθεροποιούμε ένα $x_o \in (a,b)$ και έστω $x_o < x < b$. Τότε

$$\underline{\int_a^{x_o}} f + \underline{\int_{x_o}^{x}} f = \underline{\int_a^{x}} f \quad \Longrightarrow \quad K(x_o) + \underline{\int_{x_o}^{x}} f = K(x)$$

και ομοίως

$$A(x_o) + \overline{\int_{x_o}^{x}} f = A(x)$$

[Η απόδειξη της προσθετικότητας του άνω και κάτω ολοκληρώματος αφήνεται ως (απλή) άσκηση για τον αναγνώστη]. Έχουμε λοιπόν

$$K(x) - K(x_o) = \underline{\int_{x_o}^{x}} f \le \overline{\int_{x_o}^{x}} f = A(x) - A(x_o).$$

Αλλά

$$\underline{\int_{x_o}^{x}} f \ge m_x(x - x_o)$$

όπου $m_x = \inf\{f(t) : t \in I_x\}$ (με $I_x$ συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα με άκρα $x$ και $x_o$)[3]. Ομοίως

$$\overline{\int_{x_o}^{x}} f \le M_x(x - x_o)$$

όπου $M_x = \sup\{f(t) : t \in I_x\}$. Έχουμε λοιπόν

$$m_x(x - x_o) \le K(x) - K(x_o) \le A(x) - A(x_o) \le M_x(x - x_o).$$

Στην περίπτωση $a < x < x_o$, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$m_x(x_o - x) \le \underline{\int_{x}^{x_o}} f = K(x_o) - K(x) \le A(x_o) - A(x) \le M_x(x_o - x)$$

άρα και στις δυο περιπτώσεις, αν $x \ne x_o$, έχουμε

$$m_x \le \frac{K(x) - K(x_o)}{x - x_o} \le \frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o} \le M_x.$$

[3]Πράγματι αν θεωρήσουμε την διαμέριση $\mathcal{P} = \{x_o, x\}$ του $[x_o, x]$ έχουμε $\underline{\int_{x_o}^{x}} f \ge L(f, \mathcal{P}) = m_x(x - x_o)$.

Χρησιμοποιούμε τώρα τη συνέχεια της $f$ στο $x_o$: Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in (a,b)$ και $|x - x_o| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Αν $t \in I_x$ τότε $|t - x_o| < \delta$, άρα

$$f(x_o) - \varepsilon < f(t) < f(x_o) + \varepsilon \quad \text{για κάθε } \ t \in I_x$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} f(x_o) - \varepsilon \leq & \inf\{f(t) : t \in I_x\} \\ & \sup\{f(t) : t \in I_x\} \leq f(x_o) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως αν $0 < |x - x_o| < \delta$ έχουμε

$$f(x_o) - \varepsilon \leq m_x \leq M_x \leq f(x_o) + \varepsilon$$

και άρα

$$f(x_o) - \varepsilon \leq m_x \leq \frac{K(x) - K(x_o)}{x - x_o} \leq \frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o} \leq M_x \leq f(x_o) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι τα όρια $\lim_{x\to x_o} \frac{K(x)-K(x_o)}{x-x_o}$ και $\lim_{x\to x_o} \frac{A(x)-A(x_o)}{x-x_o}$ υπάρχουν και είναι ίσα (με $f(x_o)$). Άρα οι $A$ και $K$ είναι (συνεχείς στο $[a,b]$ και) διαφορίσιμες στο $(a,b)$ με $K'(x) = A'(x)$. Επομένως διαφέρουν κατά σταθερά.

## 4.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

$$\text{Συμβολισμός :} \quad [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Θεώρημα 4.9 (Ολοκλήρωση κατά μέρη)** *Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και οι $f', g'$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

- $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
- *υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε* $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g + c.$

**Απόδειξη** Η συνάρτηση $fg$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(fg)' = fg' + f'g \Longrightarrow fg' = (fg)' - f'g.$$

Από το Θεώρημα 4.4 έπεται ότι οι συναρτήσεις $\int f'g$ και $\int (fg)' - \int f'g$ έχουν ίσες παραγώγους, άρα η διαφορά τους είναι σταθερή.

**Παράδειγμα 4.10**

$$\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int (x)'\sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

**Θεώρημα 4.11 (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης)** *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη με $\phi'$ ολοκληρώσιμη και έστω $I = \phi([a,b])$. Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε*

- $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f\circ\phi)\phi'$
- $\displaystyle\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)ds.$

**Απόδειξη** Το $I$ είναι κλειστό διάστημα γιατί η $\phi$ είναι συνεχής. Η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $I$, αφού είναι συνεχής. Ορίζουμε

$$F : I \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad F(x) = \int_{\phi(a)}^{x} f$$

(το $\phi(a)$ δεν είναι κατ'ανάγκην άκρο του διαστήματος $I$). Αφού η $f$ είναι συνεχής, από το Θεώρημα 4.2 η $F$ είναι διαφορίσιμη στο $I$ και $F' = f$. Συνεπώς $(f\circ\phi)\phi' = (F'\circ\phi)\phi'$ και άρα

$$\int_a^b (f\circ\phi)\phi' = \int_a^b (F'\circ\phi)\phi'.$$

Όμως η $F\circ\phi$ είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της $(F\circ\phi)' = (F'\circ\phi)\phi'$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα από το Θεώρημα 4.4

$$\int_a^b (F'\circ\phi)\phi' = \int_a^b (F\circ\phi)' = (F\circ\phi)(b) - (F\circ\phi)(a) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f - \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f.$$

**Παράδειγμα 4.12**

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 (x+1)^{-1/2}dx = \int_1^2 (x+1)^{-1/2}(x+1)'dx$$

Εδώ αν θέσουμε $y = \phi(x) = x+1$ και $f(y) = y^{-1/2}$ έχουμε

$$\int_1^2 (x+1)^{-1/2}(x+1)'dx = \int_1^2 f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

άρα

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \int_{\phi(1)}^{\phi(2)} f(y)dy = \int_2^3 y^{-1/2}dy = \left[\frac{y^{1/2}}{1/2}\right]_2^3 = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

γιατί $\dfrac{d}{dy}2y^{1/2} = 2.\frac{1}{2}y^{-1/2} = f(y)$.

**Θεώρημα 4.13 (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης)** *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη με $\phi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και έστω $I = \phi([a,b])$. Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε*

- $\displaystyle\int_a^b f \circ \phi = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1})'$
- $\displaystyle\int_a^b f(\phi(t))dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)(\phi^{-1}(s))'ds.$

**Απόδειξη** Εφόσον η συνάρτηση $\phi'$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται πουθενά, από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a,b]$. Έπεται ότι η $\phi$ είναι γνησίως μονότονη και άρα αντιστρέψιμη. Αν $\psi : I \to [a,b]$ είναι η αντίστροφή της τότε η $\psi'$ υπάρχει και είναι συνεχής στο $I$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 4.11 στη συνάρτηση $g = f\psi'$ βρίσκουμε

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\psi' = \int_a^b (f\psi') \circ \phi.\phi' = \int_a^b f(\phi(t)).\psi'(\phi(t)).\phi'(t)dt.$$

Αλλά $\psi'(\phi(t)).\phi'(t) = (\psi \circ \phi)'(t) = 1$ (αφού $\psi = \phi^{-1}$) και άρα

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\psi' = \int_a^b f(\phi(t))dt\,.$$