7 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Παρατήρηση Αν $x_1, x, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{υπάρχει μοναδικό } \lambda \in [0,1] \text{ ώστε } x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2.$$

Πράγματι (υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1 \neq x_2$) έχουμε

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$$

και $0 \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \leq 1$ αν και μόνον αν $x_1 \leq x \leq x_2$. Γεωμετρικά (όταν $\lambda \in (0,1)$) η σχέση $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ σημαίνει ότι το x διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x_1 και x_2 σε λόγο

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Ορισμός 7.1 *Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα*[1]*, μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται* ***κυρτή*** *αν*

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in I \text{ και } \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

και ***κοίλη*** *αν*

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in I \text{ και } \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Η f λέγεται ***γνησίως κυρτή*** *[αντίστοιχα,* ***γνησίως κοίλη****] αν για κάθε $x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2$ και $\lambda \in (0,1)$,*

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &< (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ [\text{αντίστοιχα}]\ \ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &> (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,. \end{aligned}$$

Μια συνάρτηση f είναι κοίλη αν και μόνον αν η $-f$ είναι κυρτή.

Γεωμετρικά, μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνον αν το γράφημά της είναι κάτω από κάθε χορδή του. Πράγματι: έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2$. Αν το σημείο $(x, 0)$ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα

[1] Υπενθυμίζουμε ότι διάστημα είναι ένα υποσύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του, δηλαδή που ικανοποιεί

$$x, y \in I,\ x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq I.$$

που ενώνει τα $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$ σε λόγο $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, τότε από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι το αντίστοιχο σημείο (x, y) της χορδής που ενώνει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) διαιρεί τη χορδή στον ίδιο λόγο, και συνεπώς το $(0, y)$ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(0, y_1)$ και $(0, y_2)$ πάλι στον ίδιο λόγο. Άρα $\frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, δηλαδή $y = (1-\lambda)y_1+\lambda y_2 = (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$. Επομένως η ανισότητα $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ ισοδυναμεί με την $f(x) \leq y$.

Θα δείξουμε ότι μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα είναι πάντα συνεχής, και, αν είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγός της είναι αύξουσα.

Λήμμα 7.1 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνον αν, για κάθε $x, y, z \in (a, b)$,*

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \tag{1}$$

Απόδειξη Αν η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in (x, z)$ έχουμε $y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$ άρα

$$f(y) \leq \frac{z - y}{z - x}f(x) + \frac{y - x}{z - x}f(z) \tag{2}$$

ισοδύναμα

$$f(y) - f(x) \leq \frac{y - x}{z - x}(f(z) - f(x)) \quad \overset{(y>x)}{\iff} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Επίσης η (2) ισοδυναμεί με την

$$f(z) - f(y) \geq \frac{z - y}{z - x}(f(z) - f(x)) \quad \overset{(z>y)}{\iff} \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

και έτσι η (1) αποδείχθηκε.

Αντίστροφα αν η ανισότητα (1) ισχύει **για κάθε** $x < y < z$ στο (a, b), τότε ισχύει και η (2), ισοδύναμα (γράφοντας $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$ όπου $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$)

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z)$$

άρα η f είναι κυρτή. $\square$

Σημείωση Η ανισότητα (1) ονομάζεται συνήθως «η ιδιότητα των τριών χορδών».

Λήμμα 7.2 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Η συνάρτηση*

$$g_x : (a,b)\backslash\{x\} \to \mathbb{R} \ \ \mu\epsilon \ \ g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

είναι αύξουσα.

Απόδειξη Αν $a < s < t < u < b$ από την ανισότητα (1) έχουμε

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \le \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \le \frac{f(u) - f(t)}{u - t}\,. \tag{3}$$

Θέτοντας $u = x$ από το δεξιά σκέλος της (3) προκύπτει[2] ότι

$$a < s < t < x \Rightarrow g_x(s) \le g_x(t),$$

δηλαδή η g_x είναι αύξουσα στο (a,x). Θέτοντας $s = x$ από το αριστερά σκέλος της (3) προκύπτει ότι

$$x < t < u < b \Rightarrow g_x(t) \le g_x(u),$$

δηλαδή η g_x είναι αύξουσα στο (x,b). Τέλος, θέτοντας $t = x$ από την ανισότητα (3) προκύπτει ότι

$$a < s < x < u < b \Rightarrow g_x(s) \le g_x(u)$$

και συνεπώς η g_x είναι αύξουσα στο $(a,x) \cup (x,b)$. □

Πρόταση 7.3 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο[3] του I (όχι όμως κατ'ανάγκη στα άκρα).*

Απόδειξη Έστω $x_o \in I$ και $c, d \in (a,b)$ ώστε $c < x_o < d$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o. Από το Λήμμα 7.2, η συνάρτηση

$$g = g_{x_o} : [c, x_o) \cup (x_o, d] \text{ με } \ g(y) = \frac{f(y) - f(x_o)}{y - x_o}$$

είναι αύξουσα, άρα

$$g(c) \le g(y) \le g(d) \quad \text{για κάθε} \quad y \in [c, x_o) \cup (x_o, d].$$

[2] παρατήρησε ότι $g_x(y) = g_y(x)$, $x \neq y$

[3] δηλαδή σε κάθε $x_o \in I$ για το οποίο υπάρχουν $c, d \in I$ με $c < x_o < d$.

Συνεπώς αν $M \equiv \max\{|g(c)|, |g(d)|\}$, έχουμε

$$-M \leq g(c) \leq g(y) \leq g(d) \leq M \quad \text{για κάθε} \quad y \in [c, x_o) \cup (x_o, d]$$

οπότε

$$\left|\frac{f(y) - f(x_o)}{y - x_o}\right| \leq M \;\Rightarrow\; |f(y) - f(x_o)| \leq M|y - x_o|.$$

Έπεται ότι αν δοθεί $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ (μάλιστα, $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$) ώστε για κάθε $y \in (a, b)$ με $|y - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(y) - f(x_o)| < \varepsilon$, άρα η f είναι συνεχής στο x_o. $\square$

Παρατηρήσεις 7.4 (ι) Παρατήρησε ότι το δ που επιλέξαμε στην απόδειξη εξαρτάται (όχι μόνον από το ε αλλά) και από το x_o, γιατί τα c, d, άρα και το M, εξαρτώνται από το x_o.

(ιι) Μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη σ'ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ είναι συνεχής στο (a, b), όχι όμως κατ'ανάγκη στο $[a, b]$. Ένα παράδειγμα είναι η

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

η οποία είναι κυρτή, αλλά δεν είναι συνεχής στο 0.

(ιιι) Από το Λήμμα 7.2 δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι αν $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση τότε για κάθε $x \in (a, b)$ τα όρια

$$\lim_{t \nearrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'_-(x) \quad \text{και} \quad \lim_{s \searrow x} \frac{f(s) - f(x)}{s - x} = f'_+(x)$$

υπάρχουν. Δεν έπεται όμως κατ'ανάγκη ότι η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει. Ένα παράδειγμα είναι η $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$.

Θεώρημα 7.5 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε*

$$f' \text{ αύξουσα} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ κυρτή}.$$

Μάλιστα

$$f' \text{ γνησίως αύξουσα} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ γνησίως κυρτή}.$$

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι κυρτή. Τότε από το Λήμμα 7.1 για κάθε $x, y, z \in (a, b)$ έχουμε

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

και συνεπώς

$$f'(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

όταν $x < z$. Επίσης όμως έχουμε

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

και συνεπώς

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \lim_{y \to z-} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(z)$$

όταν $x < z$, άρα τελικά

$$x < z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \lim_{y \to z-} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(z)$$

δηλαδή η f' είναι αύξουσα.

Έστω ότι η f δεν είναι κυρτή. Πάλι από το Λήμμα 7.1 , η ανισότητα (1) δεν θα ισχύει για όλες τις τριάδες $x < y < z$. Θα υπάρχουν λοιπόν $x, y, z \in (a, b)$ με $x < y < z$ ώστε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε $\xi \in (x, y)$ και $\eta \in (y, z)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(\eta)$$

οπότε $\xi < \eta$ αλλά $f'(\xi) > f'(\eta)$, άρα η f' δεν είναι αύξουσα.

Η δεύτερη ισοδυναμία αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Πόρισμα 7.6 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε*

$$f''(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b) \quad \iff \quad f \quad \text{κυρτή.}$$

Μάλιστα αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η f είναι γνησίως κυρτή, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα (π.χ. $f(x) = x^8$).

Απόδειξη Η ισοδυναμία έπεται από το Θεώρημα και το γεγονός ότι (εφόσον η f' είναι παραγωγίσιμη) η f'' είναι μη αρνητική αν και μόνον αν η f' είναι αύξουσα.

Τέλος, αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b), άρα η f είναι γνησίως κυρτή. $\square$

Το επόμενο πόρισμα προκύπτει αμέσως αν θεωρήσουμε την $-f$.

Πόρισμα 7.7 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε*

$$f' \ \textit{φθίνουσα} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \quad \textit{κοίλη}.$$

Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε

$$f''(x) \leq 0 \ \textit{για κάθε} \ x \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \quad \textit{κοίλη}.$$

Ορισμός 7.2 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ένα σημείο $\xi \in (a,b)$ είναι* ***σημείο καμπής*** *για την f αν υπάρχει $\delta > 0$ με $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq (a,b)$ ώστε*

ή *η f να είναι γνησίως κυρτή στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κοίλη στο $[\xi, \xi + \delta)$*

ή *η f να είναι γνησίως κοίλη στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κυρτή στο $[\xi, \xi + \delta)$.*

Παρατήρηση 7.8 *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, ένα $\xi \in (a,b)$ είναι σημείο καμπής για την f αν και μόνον αν είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την f'.*

Πράγματι, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως κυρτή στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κοίλη στο $[\xi, \xi + \delta)$, τότε (από το προηγούμενο θεώρημα και το πόρισμα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(\xi - \delta, \xi)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\xi, \xi + \delta)$. Επειδή η f' είναι συνεχής, έπεται ότι έχει τοπικό μέγιστο στο ξ. Ομοίως, αν η f να είναι γνησίως κοίλη στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κυρτή στο $[\xi, \xi + \delta)$, τότε η f' έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ.

Πρόταση 7.9 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν το ξ είναι σημείο καμπής για την f, τότε $f''(\xi) = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Παράδειγμα: $f(x) = x^4$. Αν όμως $f''(\xi) = 0$ και επιπλέον η $f'''(\xi)$ υπάρχει και είναι μη μηδενική, τότε το ξ είναι σημείο καμπής για την f.*

Απόδειξη Αν το ξ είναι σημείο καμπής, τότε η f' έχει τοπικό ακρότατο στο ξ και άρα $f''(\xi) = 0$.

Αν $f''(\xi) = 0$ και η $f'''(\xi)$ υπάρχει και είναι μη μηδενική, τότε η f' έχει τοπικό ακρότατο στο ξ, άρα το ξ είναι σημείο καμπής.

Ορισμός 7.3 *Αν $f : (M, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, η ευθεία $y = ax + b$ λέγεται (πλάγια)* ***ασύμπτωτος της f καθώς*** *$x \to +\infty$ αν το $\lim_{x\to+\infty}(ax + b - f(x))$ υπάρχει και είναι το 0. Αντίστοιχα ορίζεται η ασύμπτωτος μιας συνάρτησης $f : (-\infty, M) \to \mathbb{R}$ καθώς $x \to -\infty$.*

Αν $c \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, η ευθεία $x = c$ λέγεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτος της f στο*** *c αν τουλάχιστον ένα από τα όρια $\lim_{x\nearrow c} f(x)$ ή $\lim_{x\searrow c} f(x)$ είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$.*

Άσκηση 7.10 *Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = ax + b$ να είναι ασύμπτωτος της f καθώς $x \to +\infty$ είναι να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$.*