8 Αναπτύγματα Taylor

Πολυωνυμικές συναρτήσεις Μία πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

δηλαδή ένας γραμμικός συνδυασμός των (γραμμικά ανεξάρτητων) συναρτήσεων $f_0, f_1, \ldots,$ όπου $f_n(x) = x^n$. Επομένως δύο πολυώνυμα[1] p, q είναι ίσα (δηλ. $p(x) = q(x)$ για κάθε[2] $x \in \mathbb{R}$) αν και μόνον αν έχουν τους ίδιους συντελεστές. Όμως οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι απεριόριστα παραγωγίσιμες, και μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές συναρτήσει των παραγώγων: Πράγματι,

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n & &\Rightarrow\ p(0) = a_0, \\
p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} & &\Rightarrow\ p'(0) = a_1 \\
p''(x) &= 2a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} & &\Rightarrow\ p''(0) = 2a_2 \\
&\vdots \\
p^{(k)}(x) &= k! a_k + \cdots + n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k} & &\Rightarrow\ p^{(k)}(0) = k! a_k
\end{aligned}$$

άρα

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \ \ (= 0 \ \text{ όταν } k > n).$$

Επομένως,

Παρατήρηση 8.1 *Κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n γράφεται*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Συνεπώς δύο πολυώνυμα p, q είναι ίσα αν και μόνον αν
$$p^{(k)}(0) = q^{(k)}(0) \ \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

---

[1] Στον Απειροστικό Λογισμό, με τον όρο «πολυώνυμο» εννοούμε «πολυωνυμική συνάρτηση».

[2] Ας θυμηθούμε ότι αν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις p, q βαθμού n ικανοποιούν $p(x) = q(x)$ για τουλάχιστον $n + 1$ τιμές του x, τότε είναι ίσες, γιατί αν η εξίσωση $p(x) - q(x) = 0$ έχει περισσότερες από n (διαφορετικές) ρίζες, τότε $p(x) - q(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Κάθε συνάρτηση με τύπο $q(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$ είναι πολυώνυμο, γιατί είναι γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων g_k όπου $g_k(x) = (x-a)^k$. Αν q είναι πολυώνυμο και $a \in \mathbb{R}$, υπάρχουν πάντα κατάλληλοι συντελεστές $b_k \in \mathbb{R}$ ώστε $q(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$ (Απόδειξη: Άσκηση). Όπως προηγουμένως, παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή k φορές και θέτοντας $x = a$, βρίσκουμε

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N},\ b_k = \frac{q^{(k)}(a)}{k!} \ \ (= 0 \ \text{ όταν } k > n).$$

Επομένως,

Παρατήρηση 8.2 *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε πολυώνυμο q γράφεται*

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Συνεπώς δύο πολυώνυμα p, q είναι ίσα αν και μόνον αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Πολυώνυμα Taylor Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(c,d) \subseteq \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι σε κάποιο σημείο $a \in (c,d)$ οι παράγωγοι $f^{(k)}(a)$ υπάρχουν για $k = 1, \ldots, n$.

Ορισμός 8.1 *Το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ (ή $T_{n,a}$, όταν η f εννοείται) βαθμού n για την f στο σημείο a ορίζεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} T_{n,f,a}(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

Όταν $a = 0$, το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ ονομάζεται επίσης πολυώνυμο MacLaurin.

Παρατηρούμε ότι

$$T_{n,a}(a) = f(a),\ T'_{n,a}(a) = f'(a), \ldots,\ T^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Συνεπώς (από την Παρατήρηση 8.2), κάθε άλλο πολυώνυμο που ικανοποιεί αυτές τις $n+1$ ισότητες θα είναι ίσο με το $T_{n,a}$:

Πρόταση 8.3 (Συμπεριφορά στο σημείο a) *Το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο p βαθμού n που ικανοποιεί τις $n+1$ ισότητες*

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, \dots, n.$$

Γεωμετρικά, το γράφημα του πολυωνύμου Taylor $T_{1,f,a}$ είναι η εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(a, f(a))$. Γενικότερα, το γράφημα του πολυωνύμου Taylor $T_{n,f,a}$ περνάει από το σημείο $(a, f(a))$ και έχει την ίδια εφαπτόμενη με το γράφημα της f.

Παραδείγματα 8.4 (ι) Αν $f(x) = \sin x \, (x \in \mathbb{R})$, επειδή $\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ και $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ βρίσκουμε επαγωγικά

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

και συνεπώς

$$T_{2n+1,0}(x) = T_{2n+2,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ιι) Έστω $f(x) = \log(1+x)$ $(x > -1)$. Επειδή $\log^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}$ έχουμε $f^{(k)}(0) = \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ επομένως

$$T_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Εξετάζουμε τώρα τη συμπεριφορά της συνάρτησης $T_{n,a}$ (για σταθερό $n \in \mathbb{N}$) *κοντά στο σημείο a.*

Παρατηρούμε ότι εφόσον $T_{n,a}(a) = f(a)$ και οι συναρτήσεις $T_{n,a}$ και f είναι συνεχείς στο a, το όριο $\lim_{x\to a}(f(x) - T_{n,a}(x))$ υπάρχει και είναι 0.

Πόσο «γρήγορα» όμως τείνει αυτή η διαφορά στο 0;

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Έχουμε

$$T_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{άρα} \quad \frac{f(x) - T_{1,a}(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{1,a}(x)}{x-a} = 0$$

από τον ορισμό της $f'(a)$.

Δηλαδή η διαφορά $|f(x) - T_{1,a}(x)|$ τείνει στο 0 καθώς το x τείνει στο a «πιό γρήγορα» από την διαφορά $|x-a|$.

Θα δείξουμε ότι η διαφορά $|f(x) - T_{2,a}(x)|$ τείνει στο 0 καθώς το x τείνει στο a «πιό γρήγορα» από την διαφορά $(x-a)^2$, με την έννοια ότι το όριο

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{2,a}(x)}{(x-a)^2} \text{ υπάρχει και είναι } = 0.$$

Γενικότερα, θα δείξουμε ότι

Πρόταση 8.5 (Συμπεριφορά κοντά στο σημείο a) *Αν η $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο a, τότε το όριο*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} \textit{ υπάρχει και είναι } = 0.$$

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα

Λήμμα 8.6 *Έστω $g,h:(c,d)\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμες και $a\neq b\in(c,d)$.*
(ι) Υπάρχει t στο ανοικτό διάστημα με άκρα a,b ώστε

$$g'(t)(h(b)-h(a)) = h'(t)(g(b)-g(a)).$$

(ιι) Αν το όριο $\lim_{x\to a}\dfrac{h'(x)}{(x-a)^{n-1}}$ *υπάρχει τότε υπάρχει και το όριο* $\lim_{x\to a}\dfrac{h(x)-h(a)}{(x-a)^n}$ *και*

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{n(x-a)^{n-1}}$$

Απόδειξη (ι) Ορίζουμε

$$\phi(x) = g(x)(h(b)-h(a)) - h(x)(g(b)-g(a)), \qquad x\in(c,d)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\phi(b)-\phi(a) = (g(b)-g(a))(h(b)-h(a)) - (h(b)-h(a))(g(b)-g(a)) = 0.$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει t στο ανοικτό διάστημα με άκρα a,b ώστε $\phi'(t)=0$, άρα

$$0 = \phi'(t) = g'(t)(h(b)-h(a)) - h'(t)(g(b)-g(a))$$

και το (ι) αποδείχθηκε.

(ιι) Εφαρμόζοντας το (ι) για την συνάρτηση $g(t) = (t-a)^n$ και θέτοντας $b = x \neq a$ βρίσκουμε t στο ανοικτό διάστημα με άκρα a, x ώστε

$$n(t-a)^{n-1}(h(x)-h(a)) = h'(t)(x-a)^n \quad \Rightarrow \quad \frac{h(x)-h(a)}{(x-a)^n} = \frac{h'(t)}{n(t-a)^{n-1}}.$$

Το (ιι) τώρα έπεται, αν παρατηρήσουμε ότι καθώς $x \to a$, το t τείνει στο a. Αναλυτικά: αν το όριο $\lim_{x\to a} \frac{h'(x)}{(x-a)^{n-1}} = \lambda$ υπάρχει, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (c,d)$ με $0 < |x-a| < \delta$ να ισχύει

$$\left| \frac{h'(x)}{(x-a)^{n-1}} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Αλλά από το (ι) υπάρχει t με $0 < |t-a| < |x-a| < \delta$ ώστε

$$\frac{h(x)-h(a)}{(x-a)^n} = \frac{h'(t)}{n(t-a)^{n-1}}$$

άρα

$$\left| \frac{h(x)-h(a)}{(x-a)^n} - \frac{\lambda}{n} \right| = \left| \frac{h'(t)}{n(t-a)^{n-1}} - \frac{\lambda}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon$$

εφόσον $0 < |t-a| < \delta$. Επομένως $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)-h(a)}{(x-a)^n} = \dfrac{\lambda}{n}$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 8.5 Το κλειδί βρίσκεται στην

Παρατήρηση *Αν το $T_{n,f,a}$ υπάρχει, τότε*

$$T'_{n,f,a}(x) = T_{(n-1),f',a}(x).$$

Πράγματι, παραγωγίζοντας την

$$T_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

έχουμε $T'_{n,f,a}(x) = 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = T_{(n-1),f',a}(x)$.

Αποδεικνύουμε τώρα την Πρόταση με επαγωγή στο n:

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η Πρόταση ισχύει για $n = 1$, δηλαδή ότι $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-T_{1,g,a}(x)}{(x-a)} = 0$ για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση g.

Επομένως $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{1,f',a}(x)}{(x-a)} = 0$. Όμως μόλις παρατηρήσαμε ότι $T_{1,f',a} = T'_{1,f,a}$. Εφαρμόζεται λοιπόν το (ιι) του Λήμματος 8.6 και προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_{2,f,a}(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T'_{2,f,a}(x)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{1,f',a}(x)}{(x-a)} = 0.$$

Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο[3] γίνεται το επαγωγικό βήμα. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε συνάρτηση g για την οποία υπάρχει η $g^{(n-1)}(a)$ ισχύει ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-T_{n-1,g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0,$$

εφαμόζοντας την υπόθεση για $g = f'$ και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση έχουμε ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T'_{n,f,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{(n-1),f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

οπότε από το Λήμμα 8.6 έχουμε ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T'_{n,f,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{(n-1),f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 8.7 *Αν η $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο a, τότε το $T_{n,f,a}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο p βαθμού n που ικανοποιεί*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Απόδειξη Αν δύο πολυώνυμα p, q ικανοποιούν την υπόθεση, τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)-q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Γράφοντας $p(x) - q(x) = r(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$ έχουμε

[3] Η χωριστή απόδειξη της περίπτωσης $n = 2$ δεν είναι βέβαια αναγκαία, έγινε μόνο για καλύτερη κατανόηση.

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^k}=0 \tag{1}$$

για κάθε $0\le k\le n$, γιατί

$$\frac{r(x)}{(x-a)^k}=\frac{r(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-k}.$$

Θέτοντας $k=0$ στην (1) βρίσκουμε $r(a)=\lim_{x\to a}r(x)=0$ άρα $b_0=0$. Τότε όμως

$$\frac{r(x)}{x-a}=\frac{b_1(x-a)+\ldots+b_n(x-a)^n}{(x-a)}=b_1+b_2(x-a)+\ldots+b_n(x-a)^{n-1},$$

οπότε παίρνοντας όριο καθώς $x\to a$ βρίσκουμε $b_1=0$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από $n+1$ βήματα βρίσκουμε $b_0=b_1=\ldots=b_n=0$, άρα $p=q$. $\square$

Εφαρμογή *Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n+1$ στο 0 για την $f(x)=\arctan x$.*

Από τον ορισμό έχουμε

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Αντί να παραγωγίσουμε n φορές την f στο 0, είναι ευκολώτερο να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα 1 και $1+t^2$ οπότε για κάθε n βρίσκουμε[4]

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

ολοκληρώνοντας

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

[4]Αλλιώς: το άθροισμα των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο ότι 1 και λόγο $-t^2$ είναι

$$1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}=\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}.$$

Επομένως αν

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

τότε έχουμε

$$|f(x) - p(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \tag{2}$$

οπότε

$$\left| \frac{f(x) - p(x)}{x^{2n+1}} \right| \leq \frac{|x|^2}{2n+3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Από την πρόταση 8.7 έπεται τώρα ότι το p είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n+1$ στο 0 για τη συνάρτηση arctan.

Υπόλοιπο Taylor Ενδιαφερόμαστε τώρα να μελετήσουμε την συμπεριφορά των πολυωνύμων Taylor $T_{n,f,a}$ καθώς ο βαθμός n μεγαλώνει. Ειδικότερα, μας ενδιαφέρει αν τα πολυώνυμα αυτά «πλησιάζουν» την f, και με ποιά έννοια. Βέβαια ξέρουμε ότι στο σημείο a ταυτίζονται ($T_{n,f,a}(a) = f(a)$ για κάθε n), τι γίνεται όμως σε άλλα σημεία x του πεδίου ορισμού της f; Πώς συμπεριφέρεται η διαφορά $R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x)$ καθώς $n \to \infty$·

Για το σκοπό αυτό εισάγουμε το **υπόλοιπο Taylor τάξης n για την f στο σημείο a**: Είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ίδιο με την f, δηλαδή το διάστημα (c,d) που ορίζεται από τον τύπο

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x) \qquad x \in (c,d).$$

Παράδειγμα Αν $f(x) = \arctan x$ τότε

$$R_{2n+1,f,0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Θα αποδείξουμε το βασικό

Θεώρημα 8.8 (Taylor) *Έστω $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει η παράγωγος $f^{(n+1)}(t)$ για κάθε $t \in (c,d)$ και έστω $a \in (c,d)$. Τότε, για κάθε $x \in (c,d)$:*

(α) ***(Μορφή Cauchy)*** *Υπάρχει t μεταξύ των a και x ώστε*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

(β) ***(Μορφή Lagrange)*** *Υπάρχει s μεταξύ των a και x ώστε*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(γ) ***(Ολοκληρωτική μορφή)*** *Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη,*

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Για την απόδειξη, γράφουμε το ανάπτυγμα Taylor ως προς ένα «κινητό» κέντρο t:

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x) \tag{3}$$

Σταθεροποιούμε τα σημεία a, x και θεωρούμε το $R_{n,t}(x)$ ως συνάρτηση του t. Ορίζουμε δηλαδή

$$S(t) = R_{n,t}(x), \qquad t \in (c,d).$$

Αν επίσης θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$g_k(t) = (x-t)^k, \qquad t \in (c,d),\ k = 1,2,\ldots$$

τότε η (3) γράφεται

$$f(x) = f(t) + f'(t)g_1(t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}g_n(t) + S(t) \quad (t \in (c,d)). \tag{4}$$

Ισχυρισμός *Η συνάρτηση S είναι παραγωγίσιμη στο (c,d) και*

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Απόδειξη Παραγωγίζουμε την σχέση (4) (ως προς t):

$$\frac{d}{dt}f(x) = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}\left(f'(t)g_1(t)\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}g_n(t)\right) + \frac{d}{dt}S(t).$$

Έχουμε όμως $\frac{d}{dt}f(x) = 0$, $\frac{d}{dt}\left(f'(x)g_1(t)\right) = -f'(t) + f''(t)(x-t)$ και για $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}g_k(t)\right) &= \frac{f^{(k)}(t)}{k!}g_k'(t) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}g_k(t)\\ &= \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(-k(x-t)^{k-1}) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\\ &= -\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}&0 = f'(t) + (-f'(t) + f''(t)(x-t)) + \left(-f''(t)(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) +\\ &\ldots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) + S'(t)\\ &\Longrightarrow S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.\end{aligned}$$

Η Μορφή Cauchy για το υπόλοιπο Taylor έπεται τώρα από τον Ισχυρισμό εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης τιμής στη συνάρτηση S, αν παρατηρήσουμε ότι

$$S(t) = R_{n,f,t}(x) \quad \text{άρα} \quad S(x) = 0 \text{ και } S(a) = R_{n,f,a}(x) :$$

Υπάρχει t μεταξύ των a και x ώστε

$$\begin{aligned}&\frac{S(x) - S(a)}{x-a} = S'(t) \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{-R_{n,a}(x)}{x-a} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\\ &\text{άρα} \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)\,.\end{aligned}$$

Η Μορφή Lagrange για το υπόλοιπο Taylor έπεται από τον Ισχυρισμό εφαρμόζοντας το (ι) του Λήμματος 8.6 στις συναρτήσεις S και g_{n+1} (όπου

$g_{n+1}(x) = (x-a)^{n+1}$): Υπάρχει s μεταξύ των a και x ώστε

$$\frac{S(x)-S(a)}{g_{n+1}(x)-g_{n+1}(a)} = \frac{S'(s)}{g'_{n+1}(s)}$$

$$\text{δηλαδή} \quad \frac{-R_{n,a}(x)}{-(x-a)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n}{-(n+1)(x-s)^n}$$

$$\text{άρα} \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Τέλος,

Η Ολοκληρωτική μορφή για το υπόλοιπο Taylor έπεται από τη σχέση

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

εφαρμόζοντας το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα, όταν η $f^{(n+1)}$, άρα και η S', είναι ολοκληρώσιμη: Έχουμε

$$-R_{n,a}(x) = S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t)dt = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\,.$$

Παραδείγματα

(α) $f(x) = \exp x$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Lagrange: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει s μεταξύ 0 και x ώστε

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp s}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Το υπόλοιπο:

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{e^s|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ικανοποιεί} \quad \lim_{x\to 0}|R_{n,0}(x)| = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$\boxed{\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.}$$

(β) $f(x) = \sin x$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Lagrange: Επειδή $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει s μεταξύ 0 και x ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0 + \frac{\sin(s + \frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} .$$

Αλλά $T_{2n+1,f,0} = T_{2n+2,f,0}$ οπότε το υπόλοιπο

$$|R_{2n+1,0}(x)| = |R_{2n+2,0}(x)| = \left| \frac{\sin(s + \frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)!} \left| x^{2n+3} \right|$$

άρα το $R_{k,0}(x)$ τείνει στο 0 καθώς $k \to \infty$ και επομένως έχουμε

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R}.}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R}.}$$

(γ) $f(x) = \log(1+x)$. Από τη σχέση

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \quad (t \neq -1)$$

και τον ορισμό της συνάρτησης log έχουμε, για κάθε $x > -1$,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

οπότε αν ονομάσουμε $F_n(x)$ τη διαφορά $\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$ (δεν έχουμε ακόμη διαπιστώσει[5] ότι $F_n(x) = R_{n,0}$) έχουμε

$$F_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt .$$

[5] Από τις ανισότητες που ακολουθούν έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το όριο $\lim_{x\to 0} \dfrac{F_n(x)}{x^n}$ υπάρχει και είναι 0, άρα από την Πρόταση 8.7 πράγματι έχουμε $F_n(x) = R_n(x)$.

Όταν $x > 0$, έχουμε

$$|F_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| \leq \left|\int_0^x t^n dt\right| = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

και όταν $-1 < x < 0$,

$$\begin{aligned}|F_n(x)| &= \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| = \left|\int_x^0 \frac{t^n}{1+t}dt\right| \\ &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t}dt \leq \frac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n dt = \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,.\end{aligned}$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι για κάθε x με $-1 < x \leq 1$ το όριο

$$\lim_{x\to 0} F_n(x) \quad \text{υπάρχει και είναι } \ 0,$$

άρα

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{όταν } \ -1 < x \leq 1.}$$

Ειδικότερα

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Όταν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (αφού η ακολουθία $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ δεν τείνει στο 0) και για $x = -1$ επίσης αποκλίνει (αρμονική σειρά).

(δ) Το διωνυμικό ανάπτυγμα $f(x) = (1+x)^a$ όπου $a \in \mathbb{R}$ (υπενθυμίζουμε ότι η f ορίζεται από τον τύπο $f(x) = \exp(a\log(1+x))$.) Έχουμε

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= a(a-1)\ldots(a-k+1)(1+x)^{a-k} \\ f^{(k)}(0) &= a(a-1)\ldots(a-k+1).\end{aligned}$$

Επομένως

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k$$

όπου

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}.$$

Όταν $a \in \mathbb{N}$ τότε $\binom{a}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k > a$, οπότε

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k$$

όπως ήδη γνωρίζουμε.

Υποθέτουμε τώρα ότι $a \notin \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, όταν $|x| < 1$, η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$$

συγκλίνει από το κριτήριο λόγου. Πράγματι, έχουμε

$$\frac{\binom{a}{n+1} x^{n+1}}{\binom{a}{n} x^n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)(a-n)}{a(a-1)\dots(a-n+1)} \frac{n!}{(n+1)!} x = \frac{a-n}{n+1} x\,.$$

Αν $a < 0$ τότε $|a-n| = n + |a| = n - a$, ενώ αν $a > 0$ τότε $|a-n| = n - a$ αν $n \geq a$. Και στις δύο περιπτώσεις, για κάθε $n \geq |a|$,

$$\left| \frac{a-n}{n+1} x \right| = \frac{n-a}{n+1} |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x| < 1.$$

Ειδικότερα έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \binom{a}{n} x^n = 0 \quad \text{όταν} \;\; |x| < 1.$$

Θα αποδείξουμε ότι, όταν $0 \leq x < 1$ η σειρά συγκλίνει πράγματι στο $(1+x)^a$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Lagrange: υπάρχει t με $0 \leq t \leq x$ ώστε

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \binom{a}{n+1} (1+t)^{a-(n+1)} x^{n+1}$$

Για κάθε $n \geq a$, έχουμε $0 \leq (1+t)^{a-(n+1)} \leq 1$, οπότε

$$|R_n(x)| = R_n(x) \leq \binom{a}{n+1} x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι, όταν $-1 < x < 0$, ισχύει και πάλι ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Έτσι έχουμε τελικά:

$$\boxed{(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad \text{όταν } -1 < x < 1.}$$

Όταν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (κριτήριο λόγου). Για $|x| = 1$ η συμπεριφορά εξαρτάται από την τιμή του a. Για παράδειγμα, όταν $a = -1$, η σειρά αποκλίνει και στα δύο άκρα (γεωμετρική σειρά με λόγο x). Αποδεικνύεται ότι όταν $a = -1/2$ η σειρά συγκλίνει για $x = 1$ και αποκλίνει για $x = -1$, και όταν $a = 1/2$, η σειρά συγκλίνει και στα δύο άκρα.

Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου και Ε. Γιαννακούλια, Θεώρημα 26.16.