Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2009-10

Ασκήσεις 1.

1. Να βρεθούν τα $\liminf$ και $\limsup$ των ακολουθιών:

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}\Big(\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}\Big) \quad b_n = [(-1)^n + 1]n^2$$
$$c_n = n\Big(1 + \sin\frac{n\pi}{2}\Big) \qquad d_n = 3 + (-1)^n - \frac{1}{n^2}$$
$$e_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{[(-1)^n]}$$

2. Έστω $m \in \mathbf{N}$. Βρείτε μία ακολουθία (a_n) που να έχει ακριβώς m υπακολουθίες.

3. Έστω (a_n) μία ακολουθία. Να δειχθεί ότι αν οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η (a_n) συγκλίνει. Δείξτε με συγκεκριμένα παραδείγματα ότι αν μία (τουλάχιστον) από τις παραπάνω υπακολουθίες δεν συγκλίνει, τότε δεν έπεται (απαραίτητα) η συγκλιση της (a_n).

4. Έστω (a_n) μία ακολουθία και (x_k) ακολουθία της οποίας οι όροι είναι οριακά σημεία της (a_n). Δείξτε ότι αν $x_k \to x$, τότε και το x είναι οριακό σημείο της (a_n).

5. (α) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) για την οποία κάθε σημείο του A είναι οριακό σημείο. (β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) για την οποία κάθε πραγματικός αριθμός είναι οριακό σημείο.

6. Έστω (a_n) και (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε ότι

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le$$
$$\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n\ .$$

7. Έστω (a_n) μία ακολουθία και

$$b_n = \sup\{|a_{n+k} - a_n|\ : k \in \mathbf{N}\}.$$

Να δειχθεί ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

8. Έστω (a_n) για την οποία υπάρχει $\mu \in (0,1)$ ώστε $|a_{n+2} - a_{n+1}| \le \mu|a_{n+1} - a_n|$, για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

9. Έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται από $a_1, a_2 > 0$ και την αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3}\ ,\ \ n \in \mathbf{N}.$$

Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

10. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων και $A = \{a_n\ :\ n \in \mathbf{N}\}$. Αποδείξτε ότι αν $\inf A = 0$ αν και μόνο αν η (a_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν.

11. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και

$$X = \{x \in \mathbf{R}\ :\ x \le a_n \text{ για άπειρα } n \in \mathbf{N}\}.$$

Να δειχθεί ότι $\sup X = \limsup a_n$.