Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ασκήσεις 2.

Όπου στις παρακάτω ασκήσεις υπάρχουν παράμετροι, ζητείται απάντηση για οποιαδήποτε τιμή τις αντίστοιχης παραμέτρου.

1. Έστω (a_{k_n}) υπακολουθία μίας ακολουθίας (a_n). Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, έπεται απαραίτητα ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει ; Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

2. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των σειρών
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-n}.$$

3. Να βρεθεί για ποια $x \in \mathbf{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

4. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Ισχύει το αντίστροφο;

5. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k a^n}{n!}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{\beta}{n}}}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n-q^n}$ $(0<q<p)$ (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p-n^q}$ $(0<q<p)$

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n}{2^n+n}$

6. Έστω $0<a_n<1$, $n \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ συγκλίνει.

7. Έστω $a_n>0$, $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ συγκλίνει.

8. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+2n+1}{3n^2+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$$

9. Να βρεθεί μία ικανή και αναγκαία συνθήκη στην ακολουθία (a_n) ώστε να συγκλίνει η σειρά

$$\alpha_1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_3 + \cdots \ .$$

10. Έστω $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ συγκλίνει. Ισχύει το αντίστροφο;

11. Έστω $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{2^n} \ , \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0 \, .$$

12. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \ .$$

13. Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Να δειχθεί ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ τότε $na_n \to 0$.

14. Έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \ , \qquad a_{2n} = \frac{1}{2^n} \ .$$

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα που βρήκατε.

15. Έστω π αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{N}$ και $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και ότι στη περίπτωση αυτή τα αθροίσματα των δύο σειρών είναι ίσα. (Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ λέγεται *αναδιάταξη* της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.)

16. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνουσα σειρά μη-αρνητικών όρων. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} = 1 \ .$$

17. Έστω (a_n) τυχούσα ακολουθία και

$$\beta_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \ , \ n \in \mathbf{N} \, .$$

Να αποδειχθεί ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει και ότι τα αθροίσματα των δύο σειρών είναι ίσα.