Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ασκήσεις 3.

1. Να δειχθεί ότι η σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

2. Αν μία συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο A και στο σύνολο B, είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχής και στο $A \cup B$;

3. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.

4. (α) Να δειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες στο σύνολο A, τότε και το γινόμενο fg είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο A. Δείξτε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει γενικά αν οι f και g δεν είναι φραγμένες. (β) Τι συμβαίνει αν η ομοιόμορφη συνέχεια αντικατασταθεί από τη συνθήκη Lipschitz;

5. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$ για κάποιο $a > 0$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$.

6. (α) Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής σε όλο το $\mathbf{R}$. (β) Τι συμβαίνει αν η ομοιόμορφη συνέχεια αντικατασταθεί από τη συνθήκη Lipschitz;

7. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ περιοδική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν η f είναι συνεχής τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

8. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν υπάρχουν (στο $\mathbf{R}$) τα όρια $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $A, B \geq 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

10. Μία ευθεία $y = ax + b$ λέγεται ασύμπτωτη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ στο $+\infty$ (αντίστοιχα, στο $-\infty$) αν $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ (αντίστοιχα $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - ax - b) = 0$). Να δειχθεί ότι αν μία συνεχής συνάρτηση f έχει ασύμπτωτες ευθείες και στο $+\infty$ και στο $-\infty$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

11. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ και έστω ότι υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες θετικές συναρτήσεις $g_+(x)$ και $g_-(x)$ ώστε τα όρια $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g_\pm(x)}$ να υπάρχουν (στο $\mathbf{R}$). Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$.

12. Να εξεταστεί αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι (α) Lipschitz (β) ομοιόμορφα συνεχείς.

$$
\begin{array}{ll}
1. & f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, \;\; f(x) = \dfrac{1}{x} \sin(x^2) \\
2. & f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \;\; f(x) = x \sin x \\
3. & f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, \;\; f(x) = \sin \dfrac{1}{x}
\end{array}
$$

4. $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

5. $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

6. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x^2 + 1}$

7. $f : (1, \infty), \quad f(x) = \dfrac{\cos(x^3)}{x}$

8. $f : [0, \infty), \quad f(x) = \sqrt[n]{x} \ (n \in \mathbf{N})$

9. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$