Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 1ο (14-04-2014)

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

1. Ορισμός

Ακολουθία πραγματικών αριθμών λέγεται κάθε συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

→ Γενικά θα έχουμε $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

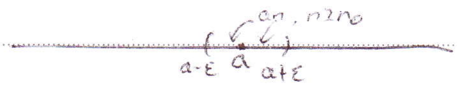
→ Αντί για $a(n)$ γράφουμε a_n, συμβολίζουμε την ακολουθία a με $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (a_n)

→ Λέμε ότι ο a_n είναι ο n-οστός όρος της (a_n).

→ Συνήθως γράφουμε $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ για το σύνολο των όρων της (a_n).

2. Όριο ακολουθίας

Λέμε ότι η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a αν "$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$".



Ιδιότητες

(a) Αν $a_n \to a$ και $a_n \to \beta$ τότε $a = \beta$.

(b) Αν $a_n \to a$ και $\beta_n \to \beta$ τότε:

i) $a_n + \beta_n \to a + \beta$

ii) $a_n \cdot \beta_n \to a \cdot \beta$

(c) Αν η (a_n) συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.

Θεώρημα

Αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει, στο $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Υπακολουθίες

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Υπακολουθία της (a_n) λέμε κάθε ακολουθία της μορφής (a_{k_n}), όπου (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Παραδείγματα

- $k_n = 2n$ / $a_{2n}: a_2, a_4, a_6, \dots$ (Υπακολουθία των "άρτιων όρων" της (a_n))
- $k_n = 2n-1$ / $a_{2n-1}: a_1, a_3, a_5, \dots$ (Υπακολουθία των "περιττών όρων" της (a_n))
- $k_n = n^2$ / $a_{n^2}: a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots$
- $k_n = 2^{2^{2^n}}$ / $a_{2^{2^{2^n}}}: a_{16}, a_{65536}, \dots$
- Κατασκευή υπακολουθίας: $\cancel{a_1}\ \cancel{a_2}\ \cancel{a_3}\ \cancel{a_4}\ \cancel{a_5}\ \cancel{a_6}\ a_7\ \cancel{a_8}\ \cancel{a_9}\ \cancel{a_{10}}\ \cancel{a_{11}}\ a_{12}\ \cancel{a_{13}}\ a_{14}\ \cancel{a_{15}}$

Φορμαλισμός

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "a"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{N} \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "a\circ k=(a_{k_n})"'] & \end{tikzcd}$$

Γιατί: $(a\circ k)(n) = a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$ ∎

→ Υπακολουθία της a_{k_n} είναι η σύνθεση της με μια $\lambda:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα, $a_{k_{\lambda_n}} = (a\circ k)\circ\lambda = a\circ(k\circ\lambda) \to$ υπακολουθία.

Πρόταση 1

Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε υπακολουθία (a_{k_n}), της (a_n), συγκλίνει, στο a.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon>0$.

- Ζητάμε: ένα $n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0: |a_{k_n}-a|<\varepsilon$.
- Έχουμε: $a_n\to a$, άρα $\exists n_0'\in\mathbb{N}: \forall s\geq n_0': |a_s-a|<\varepsilon$
- Αρκεί: $k_n\geq n_0'$ (γιατί τότε $|a_{k_n}-a|<\varepsilon$, $s=k_n$)

<u>Λήμμα</u>

Αν (k_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, τότε ισχύει $k_n\geq n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη</u> (Επαγωγή)

- $k_1\geq 1 \rightsquigarrow$ ισχύει, αφού $k_n\in\mathbb{N}$ και 1 ο ελάχιστος φυσικός.
- Επαγωγικό βήμα: αν $k_n\geq n$ τότε $k_{n+1}>k_n \Rightarrow k_{n+1}\geq k_n+1\geq n+1$ ■

Γνωρίζουμε ότι $\exists n_0: \forall s\geq n_0: |a_s-a|\overset{*}{<}\varepsilon$.

Τότε, $\forall n\geq n_0$, από το Λήμμα έχουμε $k_n\geq n\geq n_0$ και η $*$ με $s=k_n$ δίνει $|a_{k_n}-a|<\varepsilon$ ■

<u>Μια εφαρμογή:</u>

- Δείξτε ότι η $a_n=(-1)^n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

  (a_n: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$)

- Έχουμε: $a_{2n-1}=(-1)^{2n-1}=-1\to -1$

  $a_{2n}=(-1)^{2n}=1\to 1$.

Αν ίσχυε $a_n\to a\in\mathbb{R}$ (για κάποιο a) θα είχαμε:

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n-1}\to a \\ \text{και} \\ a_{2n}\to a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=-1 \\ a=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1=-1 \\ \text{Άτοπο!} \end{array} \quad \square$$

<u>ΓΕΝΙΚΑ:</u>

Αν μια ακολουθία έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια τότε δεν μπορεί να συγκλίνει.

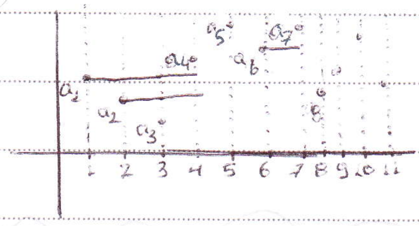
Ορισμός (σημείο κορυφής)

Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Λέμε ότι ο $m \in \mathbb{N}$ είναι σημείο κορυφής για την (a_n) αν $\forall n > m \,;\, a_m > a_n$.

Παραδείγματα

- Αν $(a_n)\downarrow$, τότε κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι σημείο κορυφής της.
- Αν $(a_n)\uparrow$, τότε δεν έχει σημεία κορυφής.



Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass)

- Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει (τουλάχιστον μία) συγκλίνουσα υπακολουθία.

(Αλλιώς)
- Αν $a \leq a_n \leq b \; \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists (a_{k_n})$ της (a_n) και $\exists z \in [a,b] : a_{k_n} \to z$.

Η τακτική της απόδειξης:

- Βήμα 1: Θα δείξουμε ότι η (a_n) έχει υπακολουθία (a_{k_n}) η οποία είναι μονότονη.
- Βήμα 2: Η (a_{k_n}) θα είναι μονότονη και φραγμένη ($a \leq a_{k_n} \leq b$), άρα θα συγκλίνει (Βασικό Θεώρημα — ΑΠΙ)

Απόδειξη

- Βήμα 1: Έστω (a_n) τυχαία ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η Η (a_n) έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής, τότε υπάρχουν $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε κάθε k_n να είναι σημείο κορυφής της (a_n)

Τότε η (a_{k_n}) είναι γνησίως φθίνουσα: $k_2 > k_1$ & k_1 σημείο κορυφής $\Rightarrow a_{k_2} < a_{k_1}$
$k_3 > k_2$ & k_2 σημείο κορυφής $\Rightarrow a_{k_3} < a_{k_2}$

2η Η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$: αν $n > N$ τότε a_n δεν είναι σημείο κορυφής της (a_n).

(Έστω $k_1, k_2, \dots, k_n$. π.χ. $N = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$)

Ορίζουμε υπακολουθία της (a_n) με τον εξής τρόπο: παίρνουμε $k_1 = N+1$.

Άρα η (a_n) δεν έχει κορυφή στο k_1, $\exists k_2 > k_1 : a_{k_1} < a_{k_2}$.

Έχουμε $k_2>k_1>N$, άρα η (a_n) δεν έχει κορυφή στο $k_2 \Rightarrow \exists k_3>k_2 : a_{k_2}<a_{k_3}$

Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε $k_1<k_2<k_3<\dots$ ώστε $a_{k_1}\leq a_{k_2}\leq a_{k_3}\leq\dots$

Η (a_n) είναι αύξουσα υπακολουθία της (a_n).

• Βήμα 2: Έστω (a_n) στο $[\alpha,\beta]$. Από το Βήμα 1, η (a_n) έχει μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}), η οποία είναι μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνει ■

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 2ο (16-04-2014)

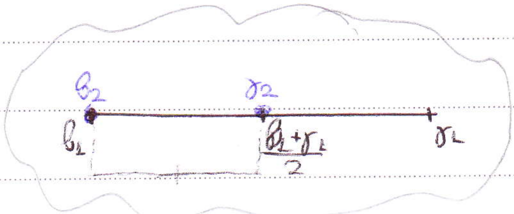
Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass)
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη

1η
- Αν (a_n) είναι μια ακολουθία πρ. αριθμών τότε αυτή έχει μονότονη υπακολουθία.
- Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η (a_n) είναι φραγμένη, τότε η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνει.

2η (Με την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων)

Έστω (a_n) φραγμένη: υπάρχει διάστημα $[\beta_1, \gamma_1]$: $\beta_1 \leq a_n \leq \gamma_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
Χωρίζουμε το $[\beta_1, \gamma_1]$ σε δύο διαδοχικά υποδιαστήματα με το ίδιο μήκος:
$[\beta_1, \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}]$ και $[\frac{\beta_1+\gamma_1}{2}, \gamma_1]$
Κάποιο από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (a_n).
Αυτό το ονομάζουμε $[\beta_2, \gamma_2]$.



Τότε:
- $[\beta_1, \gamma_1] \supseteq [\beta_2, \gamma_2]$
- $\gamma_2 - \beta_2 = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{2}$
- άπειροι όροι της (a_n) ανήκουν στο $[\beta_2, \gamma_2]$.

Χωρίζουμε το $[\beta_2, \gamma_2]$ στα $[\beta_2, \frac{\beta_2+\gamma_2}{2}]$ και $[\frac{\beta_2+\gamma_2}{2}, \gamma_2]$ και επιλέγουμε κάποιο απ' αυτά ώστε να περιέχει άπειρους όρους της (a_n).
Το ονομάζουμε $[\beta_3, \gamma_3]$.
Τότε:
- $[\beta_2, \gamma_2] \supseteq [\beta_3, \gamma_3]$
- $\gamma_3 - \beta_3 = \frac{\gamma_2 - \beta_2}{2} = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{2^2}$
- άπειροι όροι της (a_n) είναι στο $[\beta_3, \gamma_3]$

Επαγωγικά, ορίζεται μια ακολουθία διαστημάτων $[\beta_n,\gamma_n], n\in\mathbb{N}$ (κιβωτισμένα διαστήματα)

ώστε: • $[\beta_1,\gamma_1]\supseteq[\beta_2,\gamma_2]\supseteq[\beta_3,\gamma_3]\supseteq\dots\supseteq[\beta_n,\gamma_n]\supseteq[\beta_{n+1},\gamma_{n+1}]\supseteq\dots$

• $\gamma_n-\beta_n=\frac{\gamma_1-\beta_1}{2^{n-1}}\longrightarrow 0$ όταν $n\to\infty$.

• Κάθε $[\beta_n,\gamma_n]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n)

Αφού η $([\beta_n,\gamma_n])_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $\gamma_n-\beta_n\to 0$, από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων, υπάρχει (μοναδικό) $x\in\mathbb{R}$ το οποίο ανήκει σε όλα τα $[\beta_n,\gamma_n]$: $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\beta_n,\gamma_n]=\{x\}$.

Θα δείξουμε ότι $\exists (a_{k_n}): a_{k_n}\to x$.

• Στο $[\beta_1,\gamma_1]$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n). Επιλέγουμε κάποιον a_{k_1}.
Τότε $a_{k_1}, x\in[\beta_1,\gamma_1]\Rightarrow |a_{k_1}-x|\le\gamma_1-\beta_1$.

• Στο $[\beta_2,\gamma_2]$ υπάρχουν άπειροι όροι της $(a_n)\Rightarrow \exists a_{k_2}, k_2>k_1$.
Τότε $a_{k_2}, x\in[\beta_2,\gamma_2]\Rightarrow |a_{k_2}-x|\le\frac{\gamma_1-\beta_1}{2}$

• Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$:
$a_{k_n}\in[\beta_n,\gamma_n]\xRightarrow[x\in[\beta_n,\gamma_n]]{}|a_{k_n}-x|\le\gamma_n-\beta_n=\frac{\gamma_1-\beta_1}{2^{n-1}}\longrightarrow 0$.

Τότε, η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) και $a_{k_n}\to x$. ■

Θεώρημα (Βασικό - ΑΠΙ)

• Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη.
(Αλλιώς)
• ——— // ——— $\exists M>0: \forall x\in[a,b]: |f(x)|\le M$.

Απόδειξη (απαγωγή σε άτοπο)

Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη.

Τότε, $\forall M>0$ μπορούμε να βρούμε $x=x_M\in[a,b]: |f(x_M)|>M$

Εφαρμόζοντας αυτό για $M=1,2,3,4,\dots$ έχουμε: "$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in[a,b]^{(*)}: |f(x_n)|>n$".

Αφού $x_n\in[a,b]\ \forall n\in\mathbb{N}$, από το Θ. Bolzano-Weierstrass

υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n): $x_{k_n}\to x_0\in[a,b]$.

$a\le x_{k_n}\le b$, $x_{k_n}\to x_0$ $\Rightarrow a\le x_0\le b$

Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα (αρχή της μεταφοράς) $f(x_{k_n})\to f(x_0)$

$\Rightarrow |f(x_{k_n})|\to|f(x_0)|\in\mathbb{R}$. Όμως, $|f(x_{k_n})|\overset{\text{Από }(*)}{>}k_n\ge n$, άρα $|f(x_{k_n})|\to+\infty$. Άτοπο! ■

Ορισμός

$a_n \to +\infty \underset{\text{ορ}}{\iff} \forall M>0\ \exists n_0=n_0(M)\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_0: a_n>M.$

Ερωτήσεις κατανόησης (Σ/Λ)

(1) $a_n\to+\infty \iff \forall M>0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M

Λάθος (⇐): Θεωρούμε την $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ άρτιος} \\ 1, & n \text{ περιττός}\end{cases}$

(i) Έστω $M>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}: n_0>M$. Τότε $\forall n\ge n_0$:
$a_{2n}=2n\ge 2n_0>n_0>M$. (Άρα άπειροι όροι της (a_n) είναι $>M$)

(ii) Όμως, $a_n \not\to +\infty$. Αν πάρουμε $M=2$, τότε όλοι οι $a_{2n-1}=1<2$,
άρα δεν ισχύει ότι όλοι τελικά οι $a_n>2$.

Σωστό (⇒): Έστω $M>0$. Αφού $a_n\to+\infty$ υπάρχει n_0: $\forall n\ge n_0: a_n>M$ □

$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2},\dots>M$
άπειροι όροι της (a_n)

(7) Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία

Λάθος: Η προηγούμενη (a_n) δεν είναι φραγμένη, αλλά η υπακολουθία $a_{2n-1}=1$ είναι σταθερή, άρα φραγμένη. □

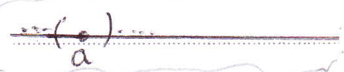
(3) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.

Σωστό: Πρόταση: Αν $a_n\to a$ τότε κάθε $a_{k_n}\to a$ □

(6) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Λάθος: Από Θ. Bolzano-Weierstrass. □

(5) Αν η (a_n) είναι φραγμένη και $a_n\not\to a$, τότε υπάρχουν $\beta\ne a$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n}\to \beta$.



$a_n\to a \underset{\text{ορ}}{\iff} \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |a_n-a|<\varepsilon\ \forall n\ge n_0$

Σωστό: Αφού $a_n\not\to a$, $\exists \varepsilon>0: \forall n\in\mathbb{N}\ \exists m\ge n: |a_m-a|\ge\varepsilon$

⇔ άπειροι όροι της (a_n) ικανοποιούν την $|a_n-a|\ge\varepsilon$.

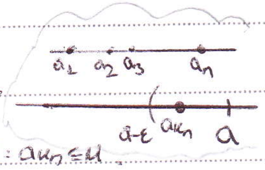
⇔ $\exists (a_{k_n}): \forall n\in\mathbb{N}: |a_{k_n}-a|\ge\varepsilon$

Η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n), άρα είναι φραγμένη.

Από Θ.B-W η (a_{k_n}) έχει υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ η οποία συγκλίνει:

$a_{k_{\lambda_n}} \to \beta \in \mathbb{R}$

Τότε: $\underbrace{|a_{k_{\lambda_n}} - a|}_{\beta} \geq \varepsilon \Rightarrow |\beta - a| \geq \varepsilon \Rightarrow \beta \neq a$. □



(9) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και υπάρχει $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.

Σωστό:
- Η (a_{k_n}) συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_{k_n} \leq M$.
- Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $k_n \geq n$ και η (a_n) είναι αύξουσα $\Rightarrow a_n \leq a_{k_n} \leq M$
- Η (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη $\xRightarrow{\text{ΑΠΙ}}$ $\exists \beta \in \mathbb{R} : a_n \to \beta$.
- Τότε, $a_{k_n} \to \beta$ (πρόταση) και $a_{k_n} \to a$. Άρα $a = \beta$. □

Θέλω να πετύχω: $|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3} \Rightarrow |n^2 a_{k_n}| < \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}}$

(10) Αν $a_n \to 0$, τότε $\exists (a_{k_n}) : n^2 a_{k_n} \to 0$.

Σωστό:
- Για $n=1$: Ξέρουμε ότι $a_n \to 0$. Άρα υπάρχουν $n_0 : \forall n \geq n_0$ $|a_n| < 1 = \frac{1}{1^3}$. Παίρνουμε κάποιον $k_1 \geq n_0$ και έχουμε $|a_{k_1}| < \frac{1}{1^3}$.
- Ζητάμε: $k_2 > k_1 : |a_{k_2}| < \frac{1}{2^3}$.

  Αφού $a_n \to 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n| < \frac{1}{2^3}$

  Παίρνουμε $k_2 > \max\{k_1, N\}$. Τότε, $k_2 > k_1$ και $k_2 > N \Rightarrow |a_{k_2}| < \frac{1}{2^3}$
- Έστω ότι έχουμε βρει $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ ώστε:

$$\begin{cases} |a_{k_1}| < \frac{1}{1^3} \\ |a_{k_2}| < \frac{1}{2^3} \\ \vdots \\ |a_{k_s}| < \frac{1}{s^3} \end{cases}$$

  Αφού $a_n \to 0$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n| < \frac{1}{(s+1)^3}$

  Παίρνουμε κάποιον $k_{s+1} > \max\{k_s, N\}$

  Τότε $k_{s+1} > k_s$ και $k_{s+1} > N \Rightarrow |a_{k_{s+1}}| < \frac{1}{(s+1)^3}$
- Επαγωγικά, βρίσκουμε $(k_n)\uparrow$ ώστε $|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3} \Rightarrow |n^2 a_{k_n}| < \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}} \Rightarrow n^2 a_{k_n} \to 0$ □

Άσκηση 28

Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών $(a_n>0)$.

Έστω $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ και έστω ότι $\inf A=0$.

Δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα $a_{k_n}\to 0$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}: 0<a_m<\varepsilon$ (*)

Λύση

- Παίρνουμε $\varepsilon=1>0$.

  $\exists k_1\in\mathbb{N}: 0<a_{k_1}<1$.

- Παίρνουμε $\varepsilon=\min\{\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k_1}\}>0$

  Από την (*) $\exists k_2\in\mathbb{N}: 0<a_{k_2}<$

  Τότε $0<a_{k_2}<\frac{1}{2}$.

  και
$$\left.\begin{array}{l} a_{k_2}<a_1 \Rightarrow k_2\neq 1 \\ a_{k_2}<a_2 \Rightarrow k_2\neq 2 \\ a_{k_2}<a_3 \Rightarrow k_2\neq 3 \\ \vdots \\ a_{k_2}<a_{k_1} \Rightarrow k_2\neq k_1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_2>k_1$$

Επαγωγικό βήμα:

Έχω βρει $k_1<k_2<\dots<k_N : |a_{k_s}|<\frac{1}{s}$, $s=1,\dots,N$

Ορίζω $\varepsilon=\min\{\frac{1}{N+1}, a_1, a_2, \dots, a_{k_N}\}$

Τότε $\exists k_{N+1} : 0<a_{k_{N+1}}<\varepsilon$

Επομένως: $a_{k_{N+1}}<\frac{1}{N+1}$ και $a_{k_{N+1}}\neq a_{k_j}$, $j=1,\dots,k_N \Rightarrow k_{N+1}>k_N$ □