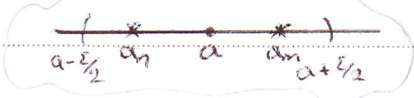
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 3ο (25-04-2014)

Βασικές ακολουθίες (ακολουθίες Cauchy)

Παρατήρηση:

Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε, για μεγάλους δείκτες, όλοι οι όροι της (a_n) είναι κοντά στο όριο a, άρα είναι και μεταξύ τους κοντά.



Συγκεκριμένα:

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού $a_n \to a$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall s \geq n_0 : |a_s - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

Συνεπώς, αν $\underbrace{n, m \geq n_0}_{\text{οποιαδήποτε}}$ έχουμε: $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ∎

Ορισμός (Βασική Ακολουθία)

Μια ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών λέγεται βασική αν: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Πρόταση 1

Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε η (a_n) είναι βασική

(Απόδειξη: από την παρατήρηση)

(Σκοπός μας: ισχύει και το αντίστροφο;)

Θεώρημα

Μια ακολουθία (a_n) είναι συγκλίνουσα αν και μόνον αν είναι βασική.

Παρατήρηση:

Πώς δείχναμε ότι μια ακολουθία (a_n) είναι βασική;
Δεν είναι αρκετό να δείξουμε ότι "διαδοχικοί όροι" της (a_n) είναι κοντά, δηλαδή π.χ. ότι $|a_{n+1}-a_n| \to 0$.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε την $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad ((a_n)\uparrow)$

- $|a_{n+1}-a_n| = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Η (a_n) δεν είναι βασική: Πράγματι έχουμε

$$a_{2n}-a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - \left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\dots+\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n\text{-όροι}} \geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

Αν η (a_n) ήταν βασική, τότε για $\varepsilon = 1$, θα μπορούσαμε να βρούμε n_0: $\forall n,m \geq n_0$: $|a_m - a_n| < 1$

$$\xrightarrow{m=2n} \forall n\geq n_0: \underset{(\text{γιατί } 2n>n\geq n_0)}{|a_{2n}-a_n|<1} \Longrightarrow \forall n\geq n_0: \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0: n<2$$

Άτοπο. $\square$

- Από την Πρόταση 1, η $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ δεν είναι συγκλίνουσα κι αφού είναι αύξουσα, τότε $a_n \to +\infty$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα δούμε τα εξής:

Πρόταση 2

Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.

Πρόταση 3

Αν η (a_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.

Μετά από αυτά, έχουμε την:

Απόδειξη (του Θεωρήματος)

Η (a_n) είναι βασική $\xrightarrow{\Pi 2}$ η (a_n) είναι φραγμένη.

Από το Θ. Bolzano-Weierstrass, η (a_n) τότε έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Τότε, από την Πρόταση 3, συγκλίνει. ■

Απόδειξη (της Πρότασης 2)

Παίρνουμε $\varepsilon = 1$.

Αφού η (a_n) είναι βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0: |a_m - a_n| < 1$.

Ειδικότερα (αν σταθεροποιήσουμε $m = n_0$) $\forall n \geq n_0: |a_n| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$

Ορίζουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$

Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq M \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη. ■

Απόδειξη (της Πρότασης 3)

Έχουμε ότι η (a_n) είναι βασική και ότι $\exists (a_{k_n})$ της (a_n):

$a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$.

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{k_n}|}_{\substack{\text{μικρό αν} \\ n \geq n_2 \text{ γιατί} \\ k_n \geq n \geq n_2}} + \underbrace{|a_{k_n} - a|}_{\substack{\text{μικρό αν} \\ n \geq n_1}}$$

Θα δείξουμε ότι: $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

1) Αφού $a_{k_n} \to a$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1: |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

2) Αφού η (a_n) είναι βασική, $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_2: |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Έστω $n \geq n_0$.

Τότε: i) $n \geq n_0 \geq n_1 \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

ii) $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_2 \Rightarrow |a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα, $|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα, $a_n \to a$. ■

Ασκήσεις

23 Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική και συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $\forall n \in \mathbb{N}: a_{2n} - a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{-όροι}} \geq \cancel{n} \cdot \frac{1}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$

Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (οτιδήποτε μικρότερο από 1/2)

Ας υποθέσουμε ότι η (a_n) είναι βασική.

Τότε, για τον $\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\exists n_0: \forall n, m \geq n_0: |a_m - a_n| < \frac{1}{4}$.

Ειδικότερα, $\forall n \geq n_0: \frac{1}{2} \leq |a_{2n} - a_n| < \frac{1}{4}$.

Άτοπο.

Άρα η (a_n) δεν είναι βασική $\Rightarrow$ η (a_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Αφού η (a_n) είναι και αύξουσα, αναγκαστικά $a_n \to +\infty$. □

24 Έστω $0 < p < 1$ και έστω (a_n) ακολουθία με την εξής ιδιότητα:

$$\forall n \geq 2: |a_{n+1} - a_n| \leq p|a_n - a_{n-1}| \quad (*)$$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι βασική.

Λύση

Παίρνω $m > n$ και προσπαθώ να φράξω το $|a_m - a_n|$.

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \dots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \quad (1)$$

$a_m - a_n = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)$

Επίσης, από την $(*)$
$$|a_3 - a_2| \leq p|a_2 - a_1|$$
$$|a_4 - a_3| \leq p|a_3 - a_2| \leq p^2|a_2 - a_1|$$
$$|a_5 - a_4| \leq p|a_4 - a_3| \leq p^3|a_2 - a_1|$$
$$\vdots$$

και επαγωγικά, $|a_{k+1} - a_k| \leq p^{k-1}|a_2 - a_1| \quad (2)$

Συνδυάζοντας τις ① και ② έχουμε:

αν $m>n$, τότε $|a_m-a_n| \le \rho^{m-2}|a_2-a_1|+\dots+\rho^n|a_2-a_1|+\rho^{n-1}|a_2-a_1|=$

$$= \rho^{n-1}|a_2-a_1|\left(\rho^{m-n-1}+\dots+\rho+1\right)=$$

$$= \rho^{n-1}|a_2-a_1|\cdot\frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \le$$

$$\le \frac{\rho^{n-1}|a_2-a_1|}{1-\rho} =$$

$$= \rho^n\underbrace{\left(\frac{|a_2-a_1|}{\rho(1-\rho)}\right)}_{B} =$$

$$= B\rho^n$$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$a=1,\ b=\rho$

Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού $0<\rho<1$ έχουμε $B\rho^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Άρα, $\exists n_0: \forall s\ge n_0,\ B\rho^s<\varepsilon$

Έστω $m,n\ge n_0$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m>n$.

Τότε, $|a_m-a_n|\le B\cdot\rho^n<\varepsilon$, διότι $n\ge n_0$. □

25 Ορίζουμε $a_1=a$, $a_2=b$ και $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}$, για $n=2,3,\dots$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι βασική ($\Rightarrow$ συγκλίνει).

Λύση

Χρησιμοποιούμε την $\boxed{24}$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{2}-a_n=\frac{a_{n-1}-a_n}{2} \Rightarrow |a_{n+1}-a_n| \overset{\substack{\text{άρα}\\ \text{και}\\ \le}}{=} \frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}|.$$

Από την $\boxed{24}$ με $\rho=\frac{1}{2}$, η (a_n) είναι βασική. □

11 Αν $a_{2n}\to a$ και $a_{2n-1}\to a$, τότε $a_n\to a$.

Λύση

Έστω $\varepsilon>0$.

- Αφού $a_{2n}\to a$, $\exists n_1\in\mathbb{N}: \forall k\ge n_1: |a_{2k}-a|<\varepsilon$.
- Αφού $a_{2n-1}\to a$, $\exists n_2\in\mathbb{N}: \forall k\ge n_2: |a_{2k-1}-a|<\varepsilon$.

Επιλέγουμε $n_0=\max\{2n_1, 2n_2-1\}$.

Έστω $n\geq n_0$.

<u>1η περίπτωση</u>: n άρτιος $\Rightarrow n=2k\geq n_0\geq 2n_1 \Rightarrow k\geq n_1 \xRightarrow{(1)} |a_{2k}-a|<\varepsilon$

<u>2η περίπτωση</u>: n περιττός $\Rightarrow n=2k-1\geq n_0\geq 2n_2-1 \Rightarrow k\geq n_2 \xRightarrow{(2)} |a_{2k-1}-a|<\varepsilon$

Άρα $|a_n-a|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$. □

12 Υποθέτουμε ότι: $a_{2k}\to a$, $a_{2k-1}\to b$, $a_{3k}\to \gamma$.
Δείξτε ότι $a=b=\gamma$ <u>και συνεπώς</u> η (a_n) συγκλίνει.

<u>Λύση</u>

2 4 6 8 10 12 14 ...
3 6 9 12 15 ...

- Η (a_{6k}) είναι κοινή υπακολουθία των (a_{2k}), (a_{3k})
  - $\left.\begin{array}{l} a_{2k}\to a \Rightarrow a_{6k}\to a \\ a_{3k}\to \gamma \Rightarrow a_{6k}\to \gamma \end{array}\right\}$ $\boxed{a=\gamma}$
- Η (a_{6k-3}) είναι κοινή υπακολουθία των (a_{2k-1}), (a_{3k})

(...) $\Rightarrow$ $\boxed{b=\gamma}$ □

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 4ο (28-04-2014)

Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας

Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία πρ. αριθμών

Ορισμός (οριακό σημείο της (a_n))

Ο $x\in\mathbb{R}$ λέγεται οριακό σημείο της (a_n) αν $\exists (a_{k_n})$: $a_{k_n}\to x$.

Παραδείγματα

i) Αν $a_n\to a\in\mathbb{R}$ τότε το μοναδικό οριακό της σημείο είναι το a (αφού, κάθε (a_{k_n}) συγκλίνει στο a).

ii) $a_n=(-1)^n$ / $a_{2n}=1\to 1$ (1 ορ. σημείο)

$a_{2n-1}=-1\to -1$ (−1 ορ. σημείο)

Έστω x οριακό σημείο της (a_n): $\exists a_{k_n}\to x \Rightarrow 1=|a_{k_n}|\to |x|$

$\Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1$ □.

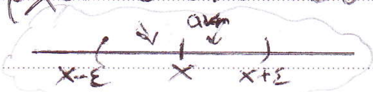
Πρόταση 1

Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n) αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Απόδειξη

(⇒) Ξέρουμε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n}\to x$

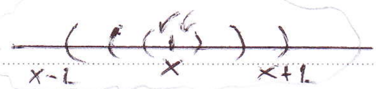
Έστω $\varepsilon>0$



Αφού $a_{k_n}\to x$, $\exists n_0: \forall n\ge n_0$ $a_{k_n}\in(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Δηλαδή, $\overbrace{a_{k_{n_0}}, a_{k_{n_0+1}}, a_{k_{n_0+2}}, \dots}^{\text{άπειροι όροι της } (a_n)} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(⇐) Παίρνουμε $\varepsilon=1$.



Από την υπόθεση υπάρχει $k_1\in\mathbb{N}$: $a_{k_1}\in(x-1, x+1)$.

Παίρνουμε $\varepsilon=\frac{1}{2}$

Από την υπόθεση υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})$.
$\Rightarrow \exists k_2 > k_1 : a_{k_2} \in (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})$
Επαγωγικά (στο n-οστό βήμα παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$) βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε $a_{k_n} \in (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \Rightarrow |a_{k_n} - x| < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{k_n} \to x$ ■

Ορισμός

Αν (a_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία, θεωρούμε το σύνολο $K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ οριακό σημείο της } (a_n)\}$.
Τότε:
- $K \neq \emptyset$ / η (a_n) είναι φραγμένη $\overset{B-W}{\Longrightarrow} \exists a_{k_n} \to x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in K$
- K φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$ / (a_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ -M \leq a_n \leq M$

  Αν $a_{k_n} \to x$ τότε $\left.\begin{array}{l} -M \leq a_{k_n} \leq M \\ a_{k_n} \to x \end{array}\right\} \Rightarrow -M \leq x \leq M$

Πρόταση 2

Το K έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο (δηλ. $\sup K \in K$, $\inf K \in K$).

Απόδειξη

Έστω $s = \sup K$ (αυτό υπάρχει γιατί το K είναι φρ. σύνολο).
Θα δείξουμε ότι ο s είναι οριακό σημείο της (a_n) (δηλ. $s \in K$).
Από την Πρόταση 1 αρκεί να πάρουμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$.
Έστω $\varepsilon > 0$.
Αφού $s = \sup K$ $\exists x \in K : s - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq s$.
Αφού ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), άπειροι όροι της (a_n) είναι στο $(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$
Τότε, για καθέναν από αυτούς τους όρους έχουμε:
$$|a_n - s| \leq |a_n - x| + |x - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \longleftrightarrow a_n \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$$
Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι ο $t = \inf K \in K$. ■

Ορισμός

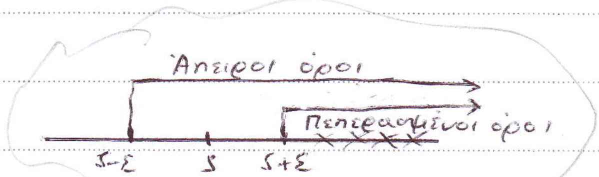
Το ανώτερο όριο της (a_n) είναι το $\max K$ (συμβ. $s=\limsup a_n$)

Το κατώτερο όριο της (a_n) είναι το $\min K$ (συμβ. $t=\liminf a_n$)

Όπου $K=$ το σύνολο των οριακών σημείων της (a_n)

Έχουμε $s=\limsup a_n \iff \begin{cases} \exists\, a_{k_n}\to s \\ \text{αν } a_{\lambda_n}\to t \text{ τότε } t\leq s. \end{cases}$

Παρατήρηση:



Έστω ότι $s=\limsup a_n$.

Έστω $\varepsilon>0$

Το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>s-\varepsilon\}$ είναι άπειρο:

$\exists\, a_{k_n}\to s$ και τότε όλοι τελικά οι a_{k_n} είναι $>s-\varepsilon$.

Το $\{n\in\mathbb{N}: a_n\geq s+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο:

Αλλιώς, θα υπήρχε (a_{k_n}) με $a_{k_n}>s+\varepsilon\ \forall n\in\mathbb{N}$

Η (a_{k_n}) θα ήταν φραγμένη (αn φραγμένη) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\, a_{k_{\lambda_n}}\to t \\ \text{και } a_{k_{\lambda_n}}\geq s+\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow t=\lim a_{k_{\lambda_n}}\geq s+\varepsilon$

Δηλαδή, $t\in K$ και $t>s$.

Άτοπο. □

Πρόταση 3

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και έστω $s\in\mathbb{R}$.

Τότε $s=\limsup a_n \iff \forall\varepsilon>0$ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>s-\varepsilon\}$ είναι άπειρο

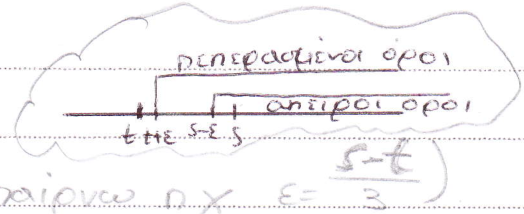
και το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>s+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έγινε στην προηγούμενη παρατήρηση.

($\Leftarrow$) Έστω $t=\limsup a_n$.

Έχουμε $t<s$ ή $t=s$ ή $t>s$.

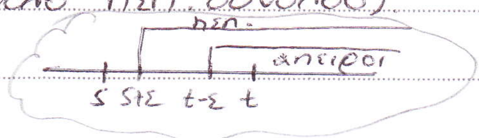


• Υποθέτουμε πρώτα ότι $t<s$:

Υπάρχει $\varepsilon>0$: $t<t+\varepsilon<s-\varepsilon<s$ (παίρνω π.χ. $\varepsilon=\frac{s-t}{3}$)

Αφού $t=\limsup a_n$, από την (⇒) έχουμε ότι το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>t+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο και από την υπόθεση το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>s-\varepsilon\}$ είναι άπειρο.

ΑΤΟΠΟ (βρήκαμε άπειρο υποσύνολο πεπ. συνόλου)



• Υποθέτουμε τώρα ότι $t>s$:

Βρίσκουμε $\varepsilon>0$: $s+\varepsilon<t-\varepsilon$

Τότε $\{n\in\mathbb{N}: a_n>t-\varepsilon\}\subseteq\{n\in\mathbb{N}: a_n>s+\varepsilon\}$

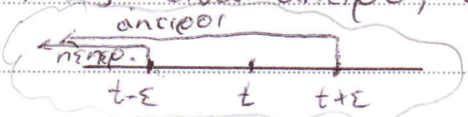
Το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>t-\varepsilon\}$ είναι άπειρο, αφού $t=\limsup a_n$ και από την (⇒).

Το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>s+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο, από υπόθεση για τον s.

ΑΤΟΠΟ (βρήκαμε άπειρο υποσύνολο πεπ. συνόλου)

Άρα $s=t=\limsup a_n$ ∎

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός του $\liminf a_n$ είναι ο εξής: "$\forall\varepsilon>0$ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n<t+\varepsilon\}$ είναι άπειρο, ενώ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n<t-\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο".



Ασκήσεις

19 Έστω (a_n), (b_n) φραγμένες ακολουθίες.

Τότε, $\liminf a_n+\liminf b_n\le\liminf(a_n+b_n)\le\underbrace{\limsup(a_n+b_n)}_{x}\le\underbrace{\limsup a_n}_{y}+\underbrace{\limsup b_n}_{z}$

Λύση

Υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n}+b_{k_n})$ με $a_{k_n}+b_{k_n}\to x$.

Η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της φρ. ακολουθίας (a_n) ⇒ (a_{k_n}) φραγμένη

⇒ $\exists\, a_{k_{\lambda_n}}\to a\le y$ (a οριακό σημείο, y μέγιστο).

Αφού $a_{k_n}+b_{k_n}\to x$ έχουμε $\left.\begin{array}{l}a_{k_{\lambda_n}}+b_{k_{\lambda_n}}\to x\\ a_{k_{\lambda_n}}\to a\end{array}\right\}\Rightarrow b_{k_{\lambda_n}}=(a_{k_{\lambda_n}}+b_{k_{\lambda_n}})-a_{k_{\lambda_n}}\to x-a\le z$ $(=\limsup b_n)$

Τότε $x\le a+z\overset{*}{\le}y+z$ □