Δευτέρα: όχι μάθημα. ΑΠ ΙΙ
Τε-Παρ: Ολοκλήρωμα

1

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 15ο (23-05-2014)

Ασκήσεις (Ομοιόμορφη Συνέχεια)
Ερωτήσεις κατανόησης

(15) Η $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

ΛΑΘΟΣ: • Είναι συνεχής.
• Το Π.Ο. είναι φραγμένο ανοιχτό διάστημα.
• Εξετάζουμε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=+\infty \Rightarrow \text{Δεν είναι ομ. συνεχής.}$$

(16) Η $f(x)=\frac{1}{x-1}$ είναι ομ. συνεχής στο $(0,1)$.

ΛΑΘΟΣ: Αφού $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, η f δεν είναι ομ. συνεχής
(f συνεχής σε αν. διάστημα (a,b)).

(17) Αν η f δεν είναι φραγμένη στο $(0,1)$, τότε δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

ΣΩΣΤΟ: Έστω ότι η f είναι ομ. συνεχής στο $(0,1)$.
Τότε, υπάρχουν τα: $l=\lim_{x\to 0^+}f(x)$, $m=\lim_{x\to 1^-}f(x)$
Ορίζουμε $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\begin{cases} l, & x=0\\ f(x), & 0<x<1\\ m, & x=1\end{cases}$.
Τότε η F είναι συνεχής, σε κλειστό διάστημα.
Άρα, η F είναι φραγμένη.
Δηλ, $\exists M>0: \forall x\in[0,1] \quad |F(x)|\le M$

$\Rightarrow \forall x\in(0,1) \quad |F(x)|\le M$

$\Rightarrow \forall x\in(0,1) \quad |f(x)|\le M$

Δηλαδή, η f είναι φραγμένη.

(18) Αν η f είναι ομ. συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η (x_n) είναι βασική, τότε η $(f(x_n))$ είναι βασική.

ΣΩΣΤΟ: Από Θεωρία.

Μάλιστα, κάθε ομ. συνεχής $f: \underline{A} \to \mathbb{R}$ έχει αυτήν την ιδιότητα.

(19) Αν η $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής, τότε $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) \in \mathbb{R}$.

ΣΩΣΤΟ: Ξέρουμε ότι $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell$.

Αφού $\frac{1}{n} \to 0^+$, από την αρχή της μεταφοράς, $f(\frac{1}{n}) \to \ell$.

Αλλιώς:

$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow (\frac{1}{n})$ βασική $\xRightarrow{f \text{ ομ.συν.}} (f(\frac{1}{n}))$ βασική $\Rightarrow (f(\frac{1}{n}))$ συγκλίνει.

(20) Έστω $f(x) = x$, $g(x) = ημx$ στο $\mathbb{R}$.

Οι f, g είναι ομ. συνεχείς, αλλά η $f \cdot g$ όχι.

ΣΩΣΤΟ:

- f ομ. συνεχής: $f'(x) = 1 \ \forall x \Rightarrow f'$ φραγμένη $\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ Lipschitz $\Rightarrow f$ ομ. συνεχής.
- g ομ. συνεχής: $g'(x) = συνx \ \forall x \Rightarrow |g'(x)| \leq 1 \ \forall x \Rightarrow$ $\Rightarrow g'$ φραγμένη $\Rightarrow g$ Lipschitz $\Rightarrow g$ ομ. συνεχής.
- $(f \cdot g)(x) = x \cdot ημx$

  Ζητάω $x_n, y_n \in \mathbb{R}$: $y_n - x_n \to 0$, αλλά $(fg)(y_n) - (fg)(x_n) \not\to 0$.

  - $(fg)'(x) = ημx + xσυνx$

    $x_n = 2n\pi \Rightarrow (fg)'(2n\pi) = 2n\pi \to +\infty$

    Άρα η $2n\pi$ είναι "καλός υποψήφιος" για το ρόλο της (x_n).

Αλλιώς $\begin{cases} y_n = x_n + \delta_n \\ \delta_n \to 0 \end{cases}$

  - Θεωρούμε την $y_n = x_n + \frac{1}{n} = 2n\pi + \frac{1}{n}$.

    Γιατί αυτήν; Γιατί $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Έχουμε $(fg)(y_n) - (fg)(x_n) =$

$$= y_n \eta\mu(y_n) - x_n \eta\mu(x_n) =$$
$$= (2n\pi + \tfrac{1}{n})\eta\mu(2n\pi + \tfrac{1}{n}) - 2n\pi \cdot \eta\mu(2n\pi) =$$
$$= 2\pi \cdot n \eta\mu(\tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n}\eta\mu(\tfrac{1}{n}) =$$
$$= 2\pi \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\eta\mu(\tfrac{1}{n}) \xrightarrow{\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1} 2\pi \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2\pi \neq 0.$$

Άρα, η (fg) δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

14 Εξετάστε αν είναι ομ. συνεχής:

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x+1$.

(b) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\eta\mu^2 x$

(d) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$.

Λύση

(a) $f'(x) = 3 \Rightarrow f'$ σταθ $\Rightarrow f'$ φραγμένη $\Rightarrow f$ Lipschitz $\Rightarrow f$ ομ. συνεχής

(b) $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \underset{\text{π.ο.}=[2,+\infty)}{\leq} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Άρα f' φραγμένη $\Rightarrow f$ ομ. συνεχής.

(c) Αρκεί (και πρέπει) να υπάρχει το:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\eta\mu^2 x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot \eta\mu x\right) = 1\cdot 0 = 0.$$

Άρα είναι ομ. συνεχής.

(d) Αν η f ήταν ομ. συνεχής, θα έπρεπε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Όμως, $\nexists \lim_{x\to 0^+}\eta\mu\frac{1}{x}$, άρα δεν είναι ομ. συνεχής. □

7 Αν $f,g : I \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής, τότε η $f+g$ είναι ομ. συνεχής (ενώ η $f \cdot g$ όχι απαραίτητα).

Λύση

Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχει $\delta_1>0$: αν $x,y\in I$ και $|x-y|<\delta_1$, τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Υπάρχει $\delta_2>0$: αν $x,y\in I$ και $|x-y|<\delta_2$, τότε $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

(Αυτά γιατί f,g : ομ. συνεχείς).

Ορίζουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$

Έστω $x,y\in I$ με $|x-y|<\delta$.

Τότε, $|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$

Αφού, $|x-y|<\delta\leq\delta_1$ και $|x-y|<\delta\leq\delta_2$, τότε:

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Για το γινόμενο: $\left.\begin{array}{ll} f(x)=x & \text{ομ. συν} \\ g(x)=\eta\mu x & \text{ομ. συν} \end{array}\right\}$ $(f\cdot g)(x)=x\cdot\eta\mu x$ δεν είναι ομ. συνεχής.

□

9 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$

Τότε, η f είναι ομοιομόρφα συνεχής.

Λύση

Ορίζουμε $g,\ h : [a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με: $g(x)=f(x)-l$, $h(x)=l$.

- g συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-l)=l-l=0$

  Από την Άσκηση 8 η g είναι ομ. συνεχής.

- $h'(x)=0 \Rightarrow h'$ φραγμένη $\Rightarrow h$ ομ. συνεχής

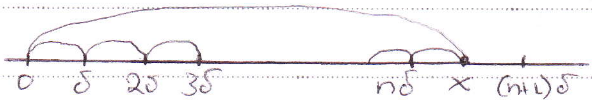
Από την Άσκηση 7, η $f=g+h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

□

10 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
Δείξτε ότι: $\exists A, B > 0: \ |f(x)| \leq A|x| + B \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Θα δείξουμε ότι $\exists A_1, B_1 > 0$:
$\forall x \geq 0 \quad |f(x)| \leq A_1 x + B_1$ (ομοίως: $\exists A_2, B_2: \forall x \leq 0 \quad |f(x)| \leq A_2|x| + B_2$)
Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$: αν $x, y \geq 0$ και $|x-y| \leq \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < 1$.
Έστω $x > 0$.



Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος n ώστε:
$$n\delta \leq x < (n+1)\delta \quad (\text{για την ακρίβεια, } n = \lfloor \tfrac{x}{\delta} \rfloor)$$
Τότε, $|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(n\delta)| + |f(n\delta) - f((n-1)\delta)| + \ldots + |f(2\delta) - f(\delta)| + |f(\delta) - f(0)|$
$< 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 =$
$= n + 1$.
$$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| < |f(0)| + n + 1 \leq \overbrace{\tfrac{1}{\delta}}^{A_1} x + \overbrace{(|f(0)| + 1)}^{B_1} \quad \square$$

11 Έστω $k > 1$.
Δείξτε ότι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^k$ <u>δεν</u> είναι ομ. συνεχής.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι είναι.
Από την Άσκηση 10 θα υπάρχουν $A, B > 0$:
$$\forall x > 0 \quad |f(x)| = x^k \leq Ax + B \Rightarrow x^{k-1} \leq A + \frac{B}{x}$$
Όμως, $x^{k-1} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$ και $A + \frac{B}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} A$, άτοπο. $\square$

14 Εξετάστε ως προς την ομ. συνέχεια:

(a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$

(b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\eta\mu\frac{1}{x}$

(c) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

(d) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2)}{x+1}$

<u>Λύση</u>

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ ✓ (δεν φτάνει)

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ ✓ $\left(\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\right)$

Από την Άσκηση 9, η f είναι ομ. συνεχής.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$ (διότι $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{}{\underset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\eta\mu y}{y}=1\in\mathbb{R}$.

Από την Άσκηση 9, η f είναι ομ. συνεχής.

(c) Είναι, αφού είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα.

(d) $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2)}{x+1}=0\Rightarrow$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.