Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 17ο (30-05-2014)

Θεώρημα (Κριτήριο Riemann)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists P_\varepsilon$ διαμέριση του $[a,b]$:

$$0\le U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$$

Πόρισμα

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\exists (P_n)$ ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$:

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=:\gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Παραδείγματα

(a) $f(x)=x^2,\quad x\in[0,1]$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε:

$P_n=\{0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<\dots<x_n=1\}$ (δηλαδή, $x_k=\frac{k}{n}$, $k=0,1,\dots,n$).

Έστω $k\in\{0,\dots,n-1\}$

Η x^2 είναι (γνησίως) αύξουσα στο $[0,1]$

Άρα, $\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$ $\quad \frac{k^2}{n^2}=f(x_k)\le f(x)\le f(x_{k+1})=\frac{(k+1)^2}{n^2}$

Άρα, $m_k(f,P_n)=\frac{k^2}{n^2}$ και $M_k(f,P_n)=\frac{(k+1)^2}{n^2}$

Άρα, $L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(f,P_n)(x_{k+1}-x_k)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=$

$=1/3-1/2n+1/6n^2$

και $U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(f,P_n)(x_{k+1}-x_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{n}s^2=$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=1/3+1/2n+1/6n^2$

Άρα, $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{1}{n}\to 0$, δηλαδή, f: Riemann ολοκληρώσιμη.

Επιπλέον, $\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=L(f,P_n)\le\underline{\int_0^1}x^2dx=\int_0^1 x^2dx\le$
$\le\overline{\int_0^1}x^2dx\le U(f,P_n)=$
$=1/3+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$

Δηλαδή: $\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}}_{a_n}\le\int_0^1 x^2dx\le\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}}_{b_n}$

Αφού $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$ και $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$, τότε:
$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

(b) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση
$P_n=\{0=x_0<\dots<x_n=1\}$, όπου $x_k=\frac{k^2}{n^2}$ με $k=0,1,\dots,n$.
Η f είναι αύξουσα στο $[0,1]$, άρα $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$
έχουμε: $m_k(f,P_n)=f(x_k)=\frac{k}{n}$ και
$M_k(f,P_n)=f(x_{k+1})=\frac{k+1}{n}$

Άρα, $0\le U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)=$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0$.

Άρα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(c) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ (συνάρτηση Dirichlet)

Παρατηρούμε ότι:
(i) $0\le f(x)\le 1$ $\forall x\in[0,1]$
(ii) $\forall\ 0\le a<b\le 1$ $\exists s,t\in(a,b)$ με $s\in\mathbb{Q}$ και $t\notin\mathbb{Q}$.
Άρα, $\min\{f(x): a\le x\le b\}=0$ και $\max\{f(x): a\le x\le b\}=1$.

Έστω $P=\{0=x_0<\dots<x_n=1\}$ τυχαία διαμέριση του $[0,1]$.
Έστω $k\in\{0,\dots,n-1\}$.
Τότε, από (ii) $m_k(f,P)=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=0$ και
$M_k(f,P)=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=1$.
Άρα $L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(f,P)(x_{k+1}-x_k)=0$ και $U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(f,P)(x_{k+1}-x_k)=1$.
Άρα f: <u>όχι</u> Riemann ολοκληρώσιμη.

(d) $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Έστω $P=\{0=x_0<\dots<x_n=1\}$ τυχαία διαμέριση του $[0,1]$.
Έστω $k\in\{0,\dots,n-1\}$ τυχαίο.
Τότε $m_k(h,P)=\inf\{h(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=0$.
Επιπλέον, $\exists q_k\in\mathbb{Q}$ στο $[x_k,x_{k+1}]$ με $q_k>\frac{x_{k+1}+x_k}{2}$.
Άρα, $M_k(h,P)=\sup\{h(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}\ge h(q_k)=q_k>\frac{x_{k+1}+x_k}{2}$.
Άρα $L(h,P)=0$, ενώ $U(h,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(h,P)(x_{k+1}-x_k)\ge$

$$\ge \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}+x_k}{2}(x_{k+1}-x_k)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2-x_k^2)=\frac{1}{2}$$

Άρα h: όχι Riemann ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα

Κάθε μονότονη συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μονότονη.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε $f:\uparrow$.
Παρατηρούμε ότι f: φραγμένη, γιατί: $f(a)\le f(x)\le f(b)$ $\forall x\in[a,b]$.
Από κριτήριο Riemann, αρκεί ν.δ.ο. $\forall\varepsilon>0$ $\exists P_\varepsilon$ διαμέριση του $[a,b]$ με $0\le U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$.
Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο.
Επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε:

$$\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}<\varepsilon \quad (*)$$

Θεωρούμε $P_\varepsilon=\{a=x_0<\dots<x_n=b\}$ τη διαμέριση του $[a,b]$, με:
$x_n=a+\frac{b-a}{n}k$ $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$.

Παρατηρούμε ότι: (i) $x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}$ $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$
(ii) $m_k(f,P_\varepsilon)=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=f(x_k)$ $(f\uparrow)$
(iii) $M_k(f,P_\varepsilon)=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=f(x_{k+1})$ $(f\uparrow)$

Άρα: $0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \frac{b-a}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} =$

$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) =$

$= \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \overset{*}{<} \varepsilon$ ■

Θεώρημα

Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η f είναι φραγμένη, γιατί είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Αφού f συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε η f είναι ομ. συνεχής στο $[a,b]$.

Δηλαδή, $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall y, y' \in [a,b]$ με $|y-y'|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(y)-f(y')|<\varepsilon$. (*)

Για να δείξω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο Riemann.

Έστω $\varepsilon>0$.

Επιλέγω $n\in\mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n} < \frac{\delta}{2}$, όπου $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P_\varepsilon = \{a=x_0<\dots<x_n=b\}$, όπου $x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k$, $k=0,\dots,n-1$.

Έστω $k\in\{0,\dots,n-1\}$.

Αφού η f συνεχής στο $[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow \exists y_k, y_k' \in [x_k, x_{k+1}]$:
$m_k(f,P_\varepsilon) = f(y_k)$ και $M_k(f,P_\varepsilon) = f(y_k')$

Τότε, $|y_k - y_k'| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \frac{\delta}{2} \overset{*}{\Longrightarrow} f(y_k') - f(y_k) = |f(y_k') - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Άρα, $M_k(f,P_\varepsilon) - m_k(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \forall k\in\{0,\dots,n-1\}$ (**)

Τότε, $0 \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(f, P_\varepsilon)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f, P_\varepsilon)(x_{k+1} - x_k) =$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(M_k(f, P_\varepsilon) - m_k(f, P_\varepsilon) \right) \overset{**}{\leq} \frac{b-a}{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right) \cdot n = \varepsilon$$