Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 18ο (02-06-2014)

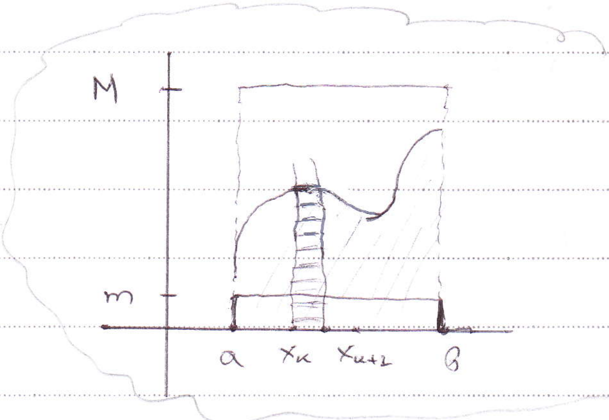
Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα 1

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Αν $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε $m(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$

Απόδειξη



Έστω $P = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$.

- $L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)$, όπου
  $m_k = \inf\{f(x): x_k \le x \le x_{k+1}\}$
- $U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$, όπου
  $M_k = \sup\{f(x): x_k \le x \le x_{k+1}\}$

Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $f(x) \le M \Rightarrow$

$\Rightarrow M_k \le M$ (M_k: ελάχιστο άνω φράγμα των τιμών της f στο $[x_k, x_{k+1}]$, M: άνω φράγμα)

Όμοια, $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m \le f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow m \le m_k$ (m_k: μέγιστο κάτω φράγμα, M: κάτω φράγμα)

Άρα: $M_k(x_{k+1}-x_k) \le M(x_{k+1}-x_k)$ $\forall k \Rightarrow$

$$\Rightarrow U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} M(x_{k+1}-x_k) = M(\beta-\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \le U(f,P) \le M(\beta-\alpha)$$

Ομοίως, $m_k(x_{k+1}-x_k) \ge m(x_{k+1}-x_k)$ $\forall k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge L(f,P) = \sum m_k(x_{k+1}-x_k) \ge \sum m(x_{k+1}-x_k) = m(\beta-\alpha). \blacksquare$$

Πορίσματα

(1) Αν $f \equiv c$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = c(\beta-\alpha)$

(2) Αν $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $f \ge 0$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$.

(3) Αν $f,g:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $f \ge g$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta g(x)dx$

↳ (Μονοτονία)

Θεώρημα 2 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και αν $t,s\in\mathbb{R}$, τότε η $tf+sg$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b (tf(x)+sg(x))\,dx = t\int_a^b f(x)\,dx + s\int_a^b g(x)\,dx.$$

[Αν έχουμε το Θεώρημα 2, για το Πόρισμα 3 θεωρούμε την $0\le f-g = 1\cdot f+(-1)\cdot g$.

Από το Πόρισμα 2, έχουμε:

$$0\le \int_a^b f-g \overset{\Theta.2}{=} 1\cdot\int_a^b f + (-1)\cdot\int_a^b g = \int_a^b f - \int_a^b g$$]

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ και ότι $\int_a^b (tf(x))\,dx = t\int_a^b f(x)\,dx$ (εύκολο).

Από το κριτήριο του Riemann, για τυχόν $\varepsilon>0$, πρέπει να βρούμε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ ώστε: $U(f+g,P)-L(f+g,P)<\varepsilon$.

Παρατήρηση 1: Έστω $[x_k,x_{k+1}]\subseteq[\alpha,\beta]$

Θέτουμε:

$$m_k=\inf\{f(x)+g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$$
$$m_k'=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$$
$$m_k''=\inf\{g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$$
$$M_k=\sup\{f(x)+g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$$
$$M_k'=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$$
$$M_k''=\sup\{g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}.$$

Για κάθε $x\in[x_k,x_{k+1}]$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} m_k'\le f(x)\\ m_k''\le g(x)\end{array}\right\} (+) \Rightarrow m_k'+m_k''\le f(x)+g(x) \Rightarrow \underbrace{m_k'+m_k''}_{\text{κάτω φράγμα}} \le \underbrace{m_k}_{\inf}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_k'\ge f(x)\\ M_k''\ge g(x)\end{array}\right\} (+) \Rightarrow f(x)+g(x)\le M_k'+M_k'' \Rightarrow \underbrace{M_k}_{\sup} \le \underbrace{M_k'+M_k''}_{\text{άνω φράγμα}}$$

Αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ είναι μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$, έχουμε:

$L(f+g,P) = \sum m_i(x_{i+1}-x_i) \geq \sum m_i'(x_{i+1}-x_i) + \sum m_i''(x_{i+1}-x_i) = L(f,P)+L(g,P)$.

Ομοίως, $U(f+g,P) \leq U(f,P)+U(g,P)$

Παρατήρηση 2: Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει διαμέριση P_1: $U(f,P_1) < L(f,P_1) + \varepsilon/2$.

Η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει διαμέριση P_2: $U(g,P_2) < L(g,P_2) + \varepsilon/2$.

Θεωρούμε την κοινή τους εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$.

Τότε: $U(f,P) \leq U(f,P_1) < L(f,P_1) + \varepsilon/2 \leq L(f,P) + \varepsilon/2$

$U(g,P) \leq U(g,P_2) < L(g,P_2) + \varepsilon/2 \leq L(g,P) + \varepsilon/2$

$\Rightarrow U(f,P) + U(g,P) < L(f,P) + L(g,P) + \varepsilon$

Από Παρατήρηση 1 έχουμε:

$$\int(f+g) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P) < L(f,P) + L(g,P) + \varepsilon \leq L(f+g,P) + \varepsilon \leq \int(f+g) + \varepsilon$$

Βρήκαμε P: $U(f+g,P) - L(f+g,P) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ τυχόν) $\xRightarrow{\text{κρ. Riemann}}$

$\Rightarrow$ η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Επίσης, $\int(f+g) \leq U(f+g,P) < L(f,P) + L(g,P) + \varepsilon \leq \int f + \int g + \varepsilon$.

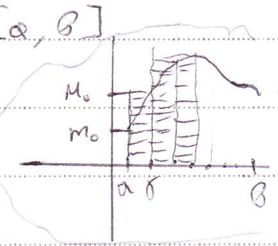
και $\int(f+g) + \varepsilon > U(f,P) + U(g,P) \geq \int f + \int g$

Άρα $\left|\int(f+g) - \left[\int f + \int g\right]\right| < \varepsilon$ (τυχόν $\varepsilon > 0$) $\Rightarrow \int(f+g) = \int f + \int g$. ■

Ασκήσεις

9 (ΒΑΣΙΚΗ) Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: "$\forall \gamma \in (\alpha,\beta)$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,\beta]$".

Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.



Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$.

Θα βρούμε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ ώστε: $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Θα ορίσουμε διαμέριση $Q = \{\gamma = x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta\}$ του $[\gamma,\beta]$ για

κατάλληλο γ ώστε: $U(f,Q)-L(f,Q) < \dots$ και κατόπιν
θα θεωρήσουμε τη διαμέριση $P=\{a\}\cup Q=\{a=x_0<\gamma=x_1<\dots<x_n=b\}$ του $[a,b]$
έτσι ώστε $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Ιδέα: $U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) = M_0(\gamma-a)+\sum_{k=1}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) = M_0(\gamma-a)+U(f,Q)$

και $L(f,P)=m_0(\gamma-a)+L(f,Q)$, όπου

$M_0=\sup\{f(x): a\le x\le \gamma\}$, $m_0=\inf\{f(x): a\le x\le\gamma\}$.

Άρα, $U(f,P)-L(f,P)=(M_0-m_0)(\gamma-a)+\underbrace{[U(f,Q)-L(f,Q)]}_{<\varepsilon/2}$

Η f είναι φραγμένη: $\exists M>0: -M\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ όποιο κι αν είναι το γ, έχουμε $M_0-m_0\le M-(-M)=2M$.

(1) Βρίσκουμε $\gamma\in(a,b): 0<\gamma-a<\frac{\varepsilon}{2M}$ (όπου $|f|\le M$ στο $[a,b]$)

(2) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,b]$ (υπόθεση) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists Q$ διαμέριση του $[\gamma,b]$: $U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon/2$

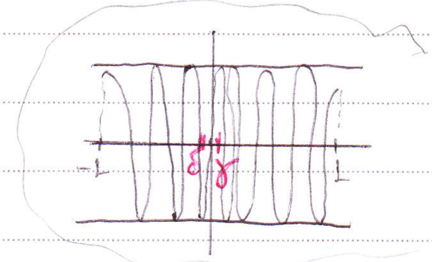
(3) Ορίζουμε $P=\{a\}\cup Q$ (διαμέριση του $[a,b]$).

Τότε, $U(f,P)-L(f,P)=(M_0-m_0)(\gamma-a)+[U(f,Q)-L(f,Q)]\le$

$\le 2M(\gamma-a)+\varepsilon/2 < 2M\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. □

10 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0.\end{cases}$

Δείξτε ότι είναι ολοκληρώσιμη.



Λύση

• Η f είναι φραγμένη:
$\left.\begin{array}{l} |f(x)|\le 1 \quad \forall x\in[-1,1]\setminus\{0\} \\ |f(0)|=2 \end{array}\right\} \Rightarrow |f|\le 2.$

• Για κάθε $\gamma\in(0,1)$ η f είναι συνεχής στο $[\gamma,1]$ $\Rightarrow$
f ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,1]$

Από την Άσκηση 9, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

• Για κάθε $\delta\in(-1,0)$ η f είναι συνεχής στο $[-1,\delta]$ $\Rightarrow$
f ολοκληρώσιμη στο $[-1,\delta]$

Από την Άσκηση 9, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]$

Από Θεώρημα (προσθετικότητα), η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]\cup[0,1]=[-1,1]$. □

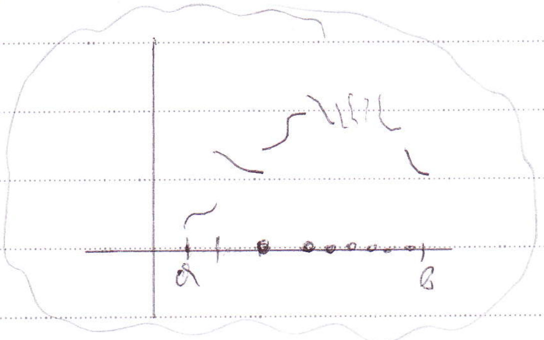
11 $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, συνεχής παντού εκτός από τα:

$$\alpha\le x_1<x_2<\dots<x_n\le\beta$$

Δείξτε ότι είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Λύση</u>

[Βασίζεται στην Άσκηση 9].



<u>Ερωτήσεις Κατανόησης</u>

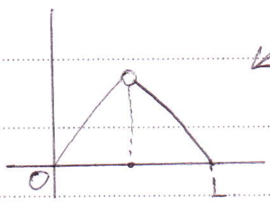
Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

(1) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε είναι φραγμένη.

ΣΩΣΤΟ: Εξ' ορισμού δεν έχουμε ορίσει ολοκλήρωμα για μη φραγμένες f.

(2) Αν η f είναι R-ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

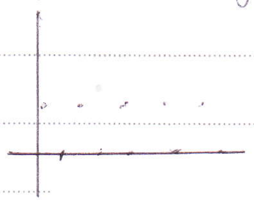
ΛΑΘΟΣ:



← Αυτή δεν παίρνει μέγιστη τιμή και είναι ολοκληρώσιμη, γιατί έχει 1 μόνο σημείο ασυνέχειας.

(3) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι ολοκληρώσιμη (και είναι φραγμένη)

ΛΑΘΟΣ:



$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}, \quad f:[0,1]\to\mathbb{R}$$

$$U(f,P)=1$$

$$L(f,P)=0$$

Είναι φραγμένη $\forall P \Rightarrow \overline{\int_0^1} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_0^1} f$.

(4) Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

ΛΑΘΟΣ: $|f| \equiv 1 \to$ ολοκληρώσιμη παντού, ενώ

f, με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, δεν είναι ολοκληρώσιμη.