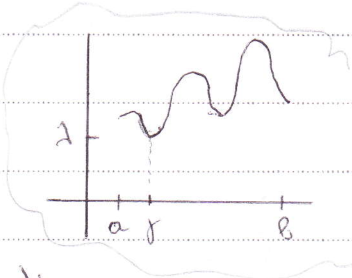
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Μάθημα 20ο (06-06-2014)

Ασκήσεις (Κεφάλαιο 4)

15 Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$
Δείξτε ότι $\exists\, x_0 \in [\alpha, \beta] : f(x_0) = g(x_0)$



Λύση

Ορίζουμε $h = f - g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$.

Η h είναι συνεχής και $\int_\alpha^\beta h(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx =$
$= \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx = 0$.

Ζητάμε $x_0 \in [\alpha, \beta] : h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0$.

Απαγωγή σε άτοπο:

(ΑΠΙ)

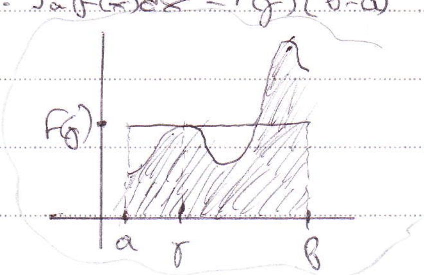
Αν $h(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε είτε $h(x) > 0$ είτε $h(x) < 0$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

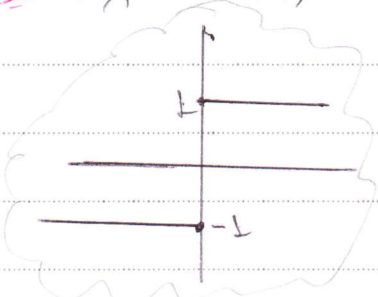
$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad h(x) \geq h(\gamma) = \lambda > 0$ (όλα τα σημεία της h είναι γνήσια θετικά)

Τότε, $\int_\alpha^\beta h(x)dx \geq \lambda(\beta - \alpha) > 0$, άτοπο. □

(Εφαρ. Κεφ 5) $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \exists \gamma \in [\alpha, \beta] : \int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\gamma)(\beta - \alpha)$



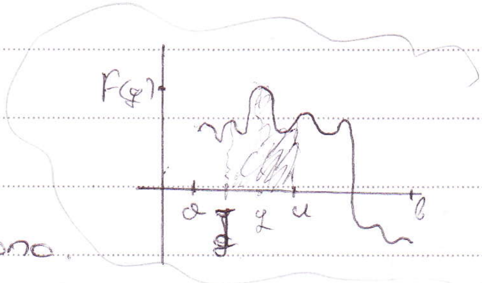
ΛΑΘΟΣ: π.χ. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$



Η f είναι φραγμένη με ένα μόνο σημείο ασυνέχειας, άρα ολοκληρώσιμη και $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, όμως η $f(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

16 $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με την εξής ιδιότητα:
$\forall$ συνεχή συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\int_a^\beta f(x)g(x)dx=0$
Ν.δ.ο. $f(x)\equiv 0$.

<u>Λύση</u>



1ος τρόπος: (Απαγωγή σε άτοπο:)

Έστω ότι $\exists y\in[\alpha,\beta]: f(y)>0$

$\int_a^\beta fg-\int_J^u f\cdot g\geq\int_\rho^\beta f\cdot g\geq a(\beta-\rho)>0$, άτοπο.

2ος τρόπος: Επιλέγουμε $g=f$.

Από την υπόθεση $\int_a^\beta f^2=\int_a^\beta f\cdot f=0 \xrightarrow[f^2\text{ συνεχή}]{\text{Ασκ.14},\ f^2\geq 0} f^2\equiv 0\Rightarrow f\equiv 0.\ \square$

17 Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με την εξής ιδιότητα:
"$\forall g:[\alpha,\beta]$ συνεχή με $g(\alpha)=g(\beta)=0$ ισχύει $\int_a^\beta f(x)g(x)\,dx=0$".
Δείξτε ότι $f\equiv 0$.

<u>Λύση</u>

(Με τον πρώτο τρόπο (της Ασκ.16) την έχουμε απαντήσει: υποθέσαμε ότι $\exists y: f(y)>0$ και ορίσαμε g με $g(a)=g(\beta)=0$, ώστε $\int_a^\beta f\cdot g>0$ (άτοπο)).

Άλλος τρόπος:

Ορίζουμε $g(x)=-f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$

Η g είναι συνεχείς και $g(\alpha)=g(\beta)=0$

Από την υπόθεση:

$\int_a^\beta[-f^2(x)(x-\alpha)(x-\beta)]dx=\int_a^\beta f(x)g(x)\,dx=0$, όμως η $-f^2(x)(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι συνεχής και μεγαλύτερη ή ίση από το μηδέν.

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$

$f^2(x)>0$

$\xRightarrow{\text{Ασκ.14}} -f^2(x)(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow \underset{x\neq\alpha\ \ x\neq\beta}{\forall x\in(\alpha,\beta)}\ f^2(x)=0\Rightarrow f(x)=0$ στο (α,β)

Αφού η f είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=0$

Όμοια $f(\beta)=0$.

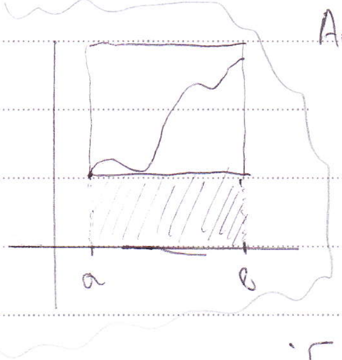
Άρα $f(x)=0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $\square$

(Ερωτ. Κατ. 6) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $\forall$ διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$L(f,P)=U(f,P)$

Τότε f σταθερή

ΣΩΣΤΟ: Θεωρούμε $P_0=\{\alpha<\beta\}$



Από την υπόθεση $L(f,P_0)=U(f,P_0)$ (1)

$L(f,P_0)=m(\beta-\alpha)$ (2)

$U(f,P_0)=M(\beta-\alpha)$ (3)

$m=\inf\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$ (4)

$M=\sup\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$ (5)

Έχουμε από (1), (2), (3) $m(\beta-\alpha)=M(\beta-\alpha)\Rightarrow m=M$.

και $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $m\le f(x)\le M=m$, άρα $f(x)=m$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

(Ερωτ. Κατ. 7) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $\exists$ διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$: $L(f,P)=U(f,P)$.

Τότε f: σταθερή.

ΣΩΣΤΟ: Έστω $P=\{\alpha=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=\beta\}$

Έχουμε $L(f,P)=U(f,P)$, δηλαδή

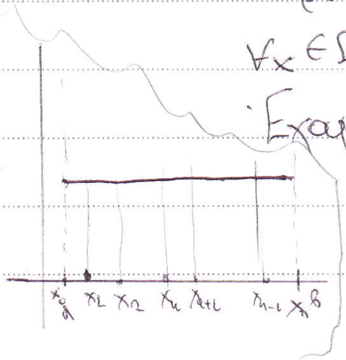
$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(M_k-m_k)}_{\ge 0}\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{>0}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k\ \left(\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=\right) m_k=M_k\left(=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}\right).$$

Άρα $\forall k$ $\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$ $m_k\le f(x)\le M_k=m_k$, δηλαδή

$\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$ $f(x)=m_k=M_k$



Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} m_0=f(x_1)=m_1 \\ m_1=f(x_2)=m_2 \\ \vdots \\ m_0=m_1=m_2=\dots=m_{n-1} \end{array}\right\} \forall x\in[\alpha,\beta]\ f(x)=m,\quad m=m_0=m_1=\dots=m_k$$

(Ερωτ. Κατ 8) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x)=0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]\cap\mathbb{Q}$

Τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$

ΣΩΣΤΟ: $\forall P$ $L(f,P)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq U(f,P)$.

$\forall k$ έχουμε $m_k\leq 0\leq M_k$ (γιατί στο $[x_k,x_{k+1}]$

$\exists$ επαρκώς ρητός $q_k\Rightarrow m_k\leq \overset{0}{f(q_k)}\leq M_k$

Άρα $\forall P$ $L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)\leq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f=\underline{\int_\alpha^\beta} f=\sup\{L(f,P): P$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}\leq 0$.

Ομοίως, $\forall P$ $U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\underset{\geq 0}{M_k}(\underset{\geq 0}{x_{k+1}-x_k})\geq 0$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f=\overline{\int_\alpha^\beta} f=\inf\{U(f,P): P$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}\geq 0$.

Έπεται, ότι, $\int_\alpha^\beta f=0$.

Βασική Άσκηση

18 Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Ν.δ.ο. $\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2\leq\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g^2(x)dx$.

Η αντίστοιχη για αθροίσματα: $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2\leq\sum_{k=1}^n a_k^2\sum_{k=1}^n b_k^2$

Λύση

Θεωρούμε το τριώνυμο

$$A(t)=\left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)t^2+2\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)t+\int_\alpha^\beta g^2(x)dx=$$
$$=At^2+Bt+\Gamma$$

Παρατήρηση: $0\leq\int_\alpha^\beta (f(x)\cdot t+g(x))^2dx=$, $\forall t\in\mathbb{R}$

$$=\int_\alpha^\beta[f^2(x)\cdot t^2+2f(x)g(x)t+g^2(x)]dx=$$
$$=\left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)t^2+\left(2\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)t+\int_\alpha^\beta g^2(x)dx=A(t)$$

Αφού το τριώνυμο $A(t)$ είναι παντού ≥ 0 έχει διακρίνουσα ≤ 0

$\Rightarrow \Delta=B^2-4A\Gamma\leq 0\Rightarrow B^2\leq 4A\Gamma\Rightarrow \cancel{4}\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2\leq\cancel{4}\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\int_\alpha^\beta g^2(x)dx$ □

19 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\leq\int_0^1 f^2(x)dx$

Λύση

Γράφουμε: $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)\cdot 1\,dx\right)^2\leq\int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 1^2dx=\int_0^1 f^2(x)dx$ □