Έστω (a_n) βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Βήμα 1: Αν η (a_n) είναι βασική τότε είναι φραγμένη

Βήμα 2: Αν η (a_n) είναι βασική και έχει κάποια υπακολουθία $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$ τότε $a_n \to a$.

Μετά από αυτό λέμε: Από Βήμα 1 η (a_n) είναι φραγμένη, από B-W έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία (a_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιον a, και από Λήμμα 2, $a_n \to a$.

Βήμα 1: Έστω (a_n) βασική.
Παίρνουμε $\varepsilon = 1$.
Αφού η (a_n) είναι βασική, υπάρχει n_0:
$\forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1$.

Ειδικότερα, για $m = n_0$ και για κάθε $n \geq n_0$.
έχουμε $|a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}|$

Ορίζουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0 - 1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$
$M < 1 + |a_{n_0}|$
Τότε $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$ Άρα a_n: φραγμένη.

Μάθημα 3ο

Λήμμα 2

Αν η (a_n) είναι βασική και έχει υπακολουθία (a_{k_n}) με $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$, ~~τότε~~ $a_n \to a$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$

Αφού $a_{k_n} \longrightarrow a$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$:
$\forall n \geq n_1$, $|a_{k_n} - a| < \varepsilon/2$

Αφού η (a_n) είναι βασική, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$:
$\forall n, m \geq n_2$, $|a_n - a| < \varepsilon/2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Έστω $n \geq n_0$ → $n \geq n_1 \longrightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon/2$
→ $\underset{\overset{\parallel}{m}}{k_n} \geq n \geq n_2 \longrightarrow |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon/2$

Τότε, $|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

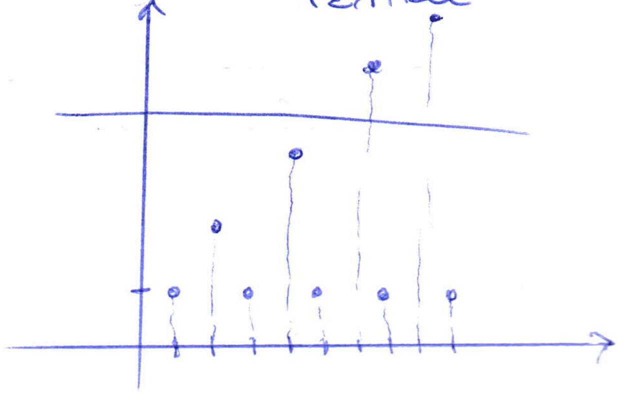
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. $a_n \longrightarrow +\infty \Leftrightarrow$ για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι $a_n > M$.

($\Rightarrow$) Σωστό,
Έστω $M > 0$. Αφού $a_n \to +\infty$, υπάρχει n_0:
$\forall n \geq n_0$ $a_n > M$. $\Rightarrow$ $\underbrace{a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots}_{\text{άπειροι όροι τελικά}} > M$

($\Leftarrow$) Λάθος,

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ n, & n = 2k \end{cases}$$



Η (a_n) δεν τείνει στο $+\infty$.
Αν $a_n \to +\infty$ θα είχαμε $\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{a_{2k-1}} \to +\infty$

Όμως για κάθε $M>0$ αν θεωρήσουμε $n_0 > M$ τότε $\underbrace{\text{για κάθε } k > \frac{n_0}{2}}_{\text{άπειροι όροι}}$ έχουμε $2k > n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{2k} = 2k > M$

2. Η (a_n) είναι άνω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists a_{k_n} \to +\infty$

($\Leftarrow$) Σωστό,

Έστω ότι $a_{k_n} \to +\infty$. Αν υπήρχει $M>0$, $\forall n$ $a_n \leq M$.
(αν η a_n ήταν άνω φραγμένη) τότε $\forall n$ θα ίσχυε $a_{k_n} \leq M$ ενώ για μεγάλα n, $a_{k_n} > M$
(αφού $a_{k_n} \to +\infty$)

($\Longrightarrow$) Σωστό,

Παίρνω $M=1$. Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, άρα υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$: $a_{k_1} > 1$.

Παίρνω $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_1}, 2\}$. Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη από M, άρα υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$, $a_{k_2} > M$

Τότε:
$$\left.\begin{aligned} &a_{k_2} > 2 \\ &a_{k_2} > a_1 \Rightarrow k_2 \neq 1 \\ &a_{k_2} > a_2 \Rightarrow k_2 \neq 2 \\ &\quad\vdots \\ &a_{k_2} > a_{k_1} \Rightarrow k_2 \neq k_1 \end{aligned}\right\} k_2 > k_1$$

Μετα ορίζουμε $M=\max\{a_1,a_2,\dots,a_{k_1},\dots,a_{k_2},3\}$
Υπαρχει k_3: $a_{k_3}>M \longrightarrow a_{k_3}>3$
$\searrow k_3>k_2$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$
με $a_{k_n}>n \Rightarrow a_{k_n}\to+\infty$.

3) Καθε υπακολουθια μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλινει.

Σωστό, Δείξαμε οτι: αν $a_n\to a$ τοτε καθε υπακολουθία $a_{k_n}\to a$.

5) Η (a_n) είναι φραγμένη και $a_n\not\to a$
Τοτε, υπάρχουν $b\neq a$ και $a_{k_n}\to b$.

Λυσ:
Αφού $a_n\not\to a$ υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε: στο $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ δεν έχουμε όλους τελικά τους όρους (a_n) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε άπειροι όροι της a_n ικανοποιούν την $|a_n-a|\geq\varepsilon$.
$\Leftrightarrow$ $\exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: $\forall n$ $|a_{k_n}-a|\geq\varepsilon$.

Αφού η (a_n) είναι φραγμένη, η (a_{k_n}) είναι κι αυτή φραγμένη. $\underset{B-W}{\Rightarrow}$ $\exists\, a_{k_{\lambda_n}}\longrightarrow b$.

Τέλη $b\neq a$: Έχουμε $|a_{k_n}-a|\geq\varepsilon\ (\forall n)$

$$\Downarrow$$

$$|a_{k_{\lambda_n}}-a|\geq\varepsilon\quad(\forall n)$$

$$\downarrow$$

$$|b-a|\geq\varepsilon>0\Rightarrow b\neq a$$

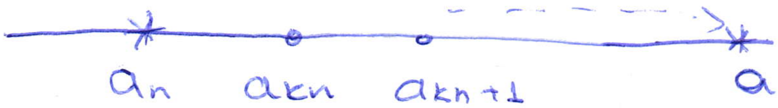
7) Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία.

Λάθος, $a_n = \begin{cases} n, & n=2k \\ 1, & n=2k-1 \end{cases}$

Η (a_n) δεν είναι φραγμένη: $\forall M>0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ n>M$.
Τότε $a_{2n} = 2n > M$.
Όμως η a_{2n-1} είναι σταθερή, άρα φραγμένη

9. Έστω (a_n) αύξουσα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a_{k_n} \longrightarrow a$. Τότε $a_n \to a$.

Σωστό,



i) Η (a_{k_n}) είναι κι αύξουσα.
Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $k_n < k_{n+1} \Rightarrow a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$

ii) Η (a_{k_n}) συγκλίνει στο a και είναι αύξουσα.
Άρα $a = \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Ειδικότερα $\forall n \ a_{k_n} \leq a$

iii) Για κάθε n έχουμε $n \leq k_n \xRightarrow[(a_n) \text{ αύξουσα}]{} a_n \leq a_{k_n} \leq a$.

Τώρα ξέρουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον a, άρα $\exists b \in \mathbb{R}$: $a_n \to b$

Όμως τότε: $\left.\begin{array}{l} a_{k_n} \longrightarrow b \\ \downarrow \text{υποθ.} \\ a \end{array}\right\}$ $b = a$ άρα $a_n \longrightarrow a$

11) $a_n \to a \Leftrightarrow \begin{cases} a_{2k} \to a \\ \text{και} \\ a_{2k-1} \to a \end{cases}$

($\Rightarrow$) Αν $a_n \to a$ τότε κάθε $a_{k_n} \to a$, άρα και οι (a_{2k}), (a_{2k-1}).

($\Leftarrow$) Αφού $a_{2k} \to a$, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$:
$\forall k \geq k_1 \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon$ (*)

Αφού $a_{2k-1} \to a$, υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$:
$\forall k \geq k_2 \quad |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ (**)

Ορίζουμε $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 - 1\}$
Έστω $n \geq n_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $n =$ άρτιος $\Rightarrow n = 2k$ και $\underset{2k}{\overset{}{n}} \geq n_0 \geq 2k_1 \Rightarrow k \geq k_1$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} |a_{2k} - a| < \varepsilon$. δηλ. $|a_n - a| < \varepsilon$

β) $n =$ περιττός $\Rightarrow n = 2k-1$ και $\underset{2k-1}{\overset{}{n}} \geq n_0 \geq 2k_2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \geq k_2 \overset{(**)}{\Longrightarrow} |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. δηλ. $|a_n - a| < \varepsilon$.
Άρα $a_n \to a$.

12) Έστω (a_n) ακολουθία. Υποθέτουμε ότι:
$a_{2k} \to a$
$a_{2k-1} \to b$
$a_{3k} \to \gamma$

Δείξτε ότι $a = b = \gamma$ και ότι η (a_n) συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι: οι (a_{2k}) και (a_{3k}) έχουν κοινή υπακολουθία της (a_{6k})

Αν $\delta_k = a_{2k}$ και $\gamma_k = a_{3k}$
Τότε $a_{6k} = \delta_{3k}$ υπακολουθία της δ_k
$a_{6k} = \gamma_{2k}$ -//- της γ_k.

Αφού $a_{2k} \to a \Rightarrow a_{6k} \to a$
-//- $a_{3k} \to \gamma \Rightarrow a_{6k} \to \gamma$
$\left.\right\} a = \gamma$

Όμοια, η (a_{6k-3}) είναι κοινή υπακολουθία των (a_{2k-1}), (a_{3k}), γιατί:

$a_{6k-3} = a_{3(2k-1)}$, υπακολ. της a_{3k}.
$a_{6k-3} = a_{6k-2-1} = a_{2(3k-1)-1}$ υπακολ. της a_{2k-1}.

Αφού $a_{2k-1} \to b \Rightarrow a_{6k-3} \to b$
$a_{3k} \to \gamma \Rightarrow a_{6k-3} \to \gamma$
$\left.\right\} b = \gamma$

Τελικά $a = b = \gamma$.
Τότε $a_{2k} \to a$ και $a_{2k-1} \to b = a \underset{\text{ασκ 11}}{\Longrightarrow} a_n \to a$

28) Έστω $a_n > 0$ και έστω ότι $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$
Δείξτε ότι η (a_n) έχει γνησίως φθίνουσα $a_{k_n} \to 0$

10) Αν $a_n \to 0$ τότε υπάρχει (a_{k_n}) : $n^2 a_{k_n} \to 0$

Λύση 28)

Το γεγονός ότι $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ σημαίνει ότι:

Λύση 10)

Αρκεί να διαλέξω τους a_{k_n}:

$$|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3} \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon>0$ υπάρχει $s\in\mathbb{N}$:
$0<a_s<\varepsilon$ (*)

Παίρνω $\varepsilon=1$ και βρίσκω
$k_1\in\mathbb{N}$: $0<a_{k_1}<1$

Παίρνω $\varepsilon=\min\{\frac{1}{2},a_1,\dots,a_{k_1}\}>0$
και βρίσκω $k_2\in\mathbb{N}$:

$0<a_{k_2}<\varepsilon$

$a_{k_2}<\frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_{k_2}<a_1,a_2,\dots,a_{k_1}$

$\Downarrow$

$k_2\neq 1,2,\dots,k_1$

$\Downarrow$

$k_1<k_2$

Επαγωγικά βρίσκουμε:
$k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$
με $0<a_{k_n}<\frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$a_{k_n}\to 0$

$\Downarrow$

$n^2|a_{k_n}|<\frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$n^2a_{k_n}\to 0$

Παίρνω $\varepsilon=1$ και βρίσκω $k_1\in\mathbb{N}$:

$|a_{k_1}|<\frac{1}{1^3}$ (όλοι τελικά οι όροι της (a_n) την ικανοποιούν διότι $a_n\to 0$)

Παίρνω $\varepsilon=\frac{1}{2^3}$

Όλοι τελικά οι $|a_s|<\frac{1}{2^3}$ διότι $a_n\to 0$

Άρα υπάρχει $k_2>k_1$:
$|a_{k_2}|<\frac{1}{2^3}$

Παίρνω $\varepsilon=\frac{1}{3^3}$ και βρίσκω $k_3>k_2$: $|a_{k_3}|<\frac{1}{3^3}$
κ.λ.π.