Μάθημα 4ο

Ανώτερο και Κατώτερο Όριο Ακολουθίας
(lim sup a_n, lim inf a_n)

Ορισμός (οριακό σημείο ακολουθίας)

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ο $x\in\mathbb{R}$ λέγεται οριακό σημείο (ή υπακολουθιακό όριο) της (a_n), αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n}\to x$.

Παραδείγματα

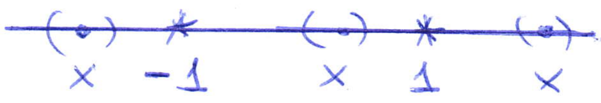
i) Η $a_n=\frac{1}{n}$ συγκλίνει στο $0 \Rightarrow a_n\to 0$, αν $a_{k_n}\to x\in\mathbb{R}$.

Τότε $x=0$ (μάλιστα, κάθε $a_{k_n}\to 0$)
Επομένως, το μόνο οριακό σημείο είναι το 0.

ii) Η $b_n=(-1)^n$. Έχουμε ότι:

$b_{2n}\to 1$
και $b_{2n-1}\to -1$ Άρα οι 1 και -1 είναι οριακά σημεία.

Κάθε $x\neq 1,-1$ δεν είναι οριακό σημείο της (b_n)



Αν $x\neq -1,1$ τότε υπάρχει $\varepsilon>0$: $-1,1\notin(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$

Και τότε κανένας όρος της (b_n) δεν είναι στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow \exists\, b_{k_n} \to x$

(θα είχαμε όλες τελικά τις b_{k_n} στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$)

Ορισμός:

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.
Συμβολίζουμε με $K = K((a_n))$ το σύνολο όλων των οριακών σημείων της (a_n), δηλαδή:

$$K = \{x \in \mathbb{R} : \exists (a_{k_n}) \text{ τ.ω. } a_{k_n} \to x\}$$

Παρατηρούμε ότι:

α) $K \neq \emptyset$: αφού η (a_n) είναι φραγμένη, από το Θ. B-W υπάρχει (a_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιον $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $x_0 =$ οριακό σημείο $\rightsquigarrow$ $x_0 \in K$.

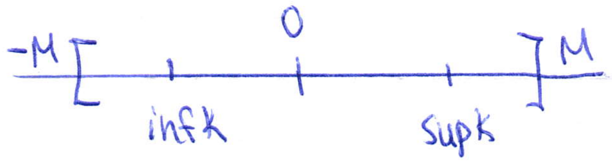
β) Το K είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Η (a_n) είναι φραγμένη, άρα $\exists M > 0$:
$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ (*)

Αν $x \in K$ τότε υπάρχει $a_{k_n} \to x$.

Από την (*) έχουμε $\underbrace{|a_{k_n}|}_{\downarrow\, |x|} \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x| \leq M$

Δηλαδή $K \subseteq [-M, M]$



Αφού το K είναι μη κενό και άνω φραγμένο, υπάρχουν οι $\sup K$ και $\inf K$ (Αξίωμα Πληρότητας).

<u>Πρόταση</u>: $\sup K \in K$ και $\inf K \in K$

Το σύνολο των οριακών σημείων μιας φραγμένης ακολουθίας έχει <u>μέγιστο</u> και <u>ελάχιστο</u> στοιχείο.

• <u>Λήμμα</u> (χαρακτηρισμός οριακού σημείου)

Έστω (a_n) και $x \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

α) Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

γ) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n > N$ ώστε $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

• <u>Απόδειξη λήμματος</u>

(α) $\Rightarrow$ (β)

Έστω $\varepsilon > 0$, θεωρούμε το $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

~~Αφού~~ ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

$\exists a_{k_n} \to x$

Άρα, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_{k_n} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k_{n_0}}, a_{k_{n_0+1}}, a_{k_{n_0+2}}, \dots \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(β) $\Rightarrow$ (γ)

Έστω $\varepsilon > 0$. Και έστω $N \in \mathbb{N}$.

Από την υπόθεση υπάρχουν άπειροι το πλήθος (a_n) στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ άρα και κάποιος με δείκτη $n > N$.

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$.

Παίρνω $\varepsilon=1$ και $N=1$.

Απο την υπόθεση, υπάρχει $k_1>1$ ώστε

$a_{k_1} \in (x-1, x+1) \Rightarrow |a_{k_1}-x|<1$

Παίρνω $\varepsilon = 1/2$ και $N=k_1$

Απο την υπόθεση, υπάρχει $k_2>N=k_1$

ώστε $a_{k_2} \in (x-1/2, x+1/2) \Rightarrow |a_{k_2}-x|<\frac{1}{2}$

$\vdots$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$

ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ $|a_{k_n}-x|<1/n \longrightarrow 0$.

Άρα ο x είναι οριακό σημείο.

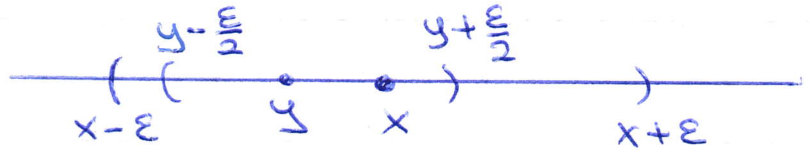
Απόδειξη Πρότασης

Ξέρω ότι $\sup K \in K$.

Έστω $x=\sup K$. Θέλω νδο $x\in K$, δηλαδή ότι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

Θα δείξουμε ότι ικανοπ. το (β).

Έστω $\varepsilon>0$.



Αφού $x=\sup K$, υπάρχει $y\in K$: $x-\frac{\varepsilon}{2}<y\leq x$

Αφού ο y είναι οριακό σημείο της (a_n) υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $|a_n-y|<\varepsilon/2$

Τότε για όλους αυτούς τους a_n έχουμε:

$|a_n-x| \leq |a_n-y|+|y-x| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

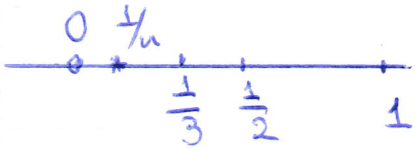
Άρα βρήκαμε άπειρους όρους της a_n στο διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Από το ΛΗΜΜΑ, $x\in K$.

Ορισμός

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.
Το ανώτερο όριο ($\limsup a_n$) της (a_n) είναι το μέγιστο υπακολουθιακό όριο της (a_n)
Το κατώτερο όριο ($\liminf a_n$) της (a_n) είναι το ελάχιστο υπακολουθιακό όριο της (a_n).
Η πρόταση μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν.

Παράδειγμα:



$a_n = \frac{1}{n}$, $K = \{0\}$

$\limsup a_n = \liminf a_n = 0$

(Παρατηρούμε ότι $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$
Δεν μας ενδιαφέρει)

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι πώς θα βρούμε τον $\limsup a_n$.

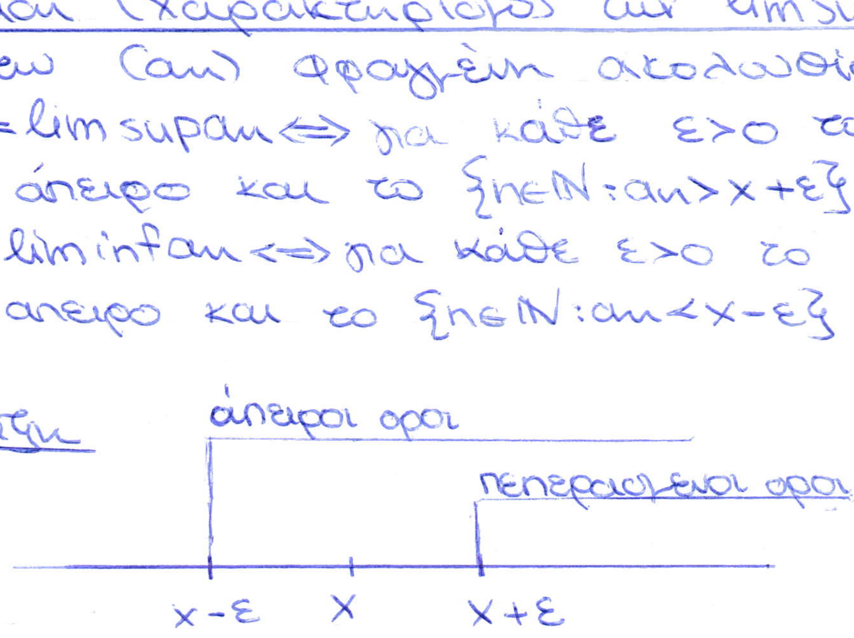
Πρόταση (Χαρακτηρισμός των $\limsup a_n$ κ' $\liminf a_n$)

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Τότε:

i) $x = \limsup a_n \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

ii) $y = \liminf a_n \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη



$(\Longrightarrow)$ Έστω $\varepsilon>0$. Αφού ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), υπάρχει $a_{k_n} \to x$.

Τότε $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ a_{k_n} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ a_{k_n} > x-\varepsilon$

άπειροι όροι της a_n

Θέλουμε να δείξουμε και ότι το $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Έστω ότι υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) πάνω από $x+\varepsilon$. Ισοδύναμα υπάρχει (a_{k_n}) ώστε $\forall n$

$a_{k_n} > x+\varepsilon$.

Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη, άρα έχει περαιτέρω υπακολουθία $a_{k_{\lambda_n}} \to z$.

Αφού $a_{k_n} > x+\varepsilon \Rightarrow a_{k_{\lambda_n}} > x+\varepsilon \Rightarrow z \geq x+\varepsilon$.

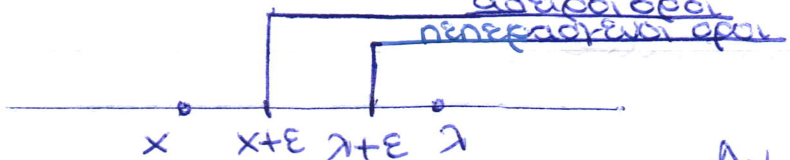
Τότε, ο z είναι οριακό σημείο της (a_n) και $z \in K$ και $z \geq x+\varepsilon > x = \limsup a_n = \max K$, Άτοπο.

$(\Longleftarrow)$ Έστω $x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon>0$: $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x-\varepsilon\}$ είναι άπειρο και οι $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x+\varepsilon\}$ πεπερασμένο.

Θα δείξω ότι $x = \limsup a_n$.

Έστω ότι $x \neq \underbrace{\limsup a_n}_{\lambda}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) 1η περίπτωση: $x<\lambda$ } άτοπο



Αν πάρω $0<\varepsilon<\frac{\lambda-x}{2}$

τότε $x < x+\varepsilon < \lambda-\varepsilon < \lambda$.

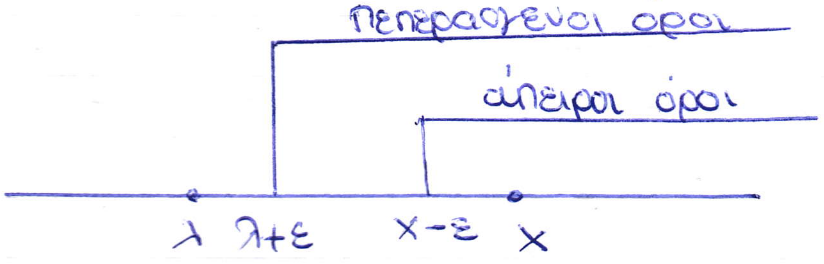
Από την υπόθεση το σύνολο $A=\{n \in \mathbb{N} : a_n > x+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Όμως, αφού $\lambda = \limsup a_n$, από την $(\Rightarrow)$ που έχει αποδειχθεί, το $B=\{n \in \mathbb{N} : a_n > \lambda-\varepsilon\}$ είναι άπειρο.

Όμως αφού $\lambda-\varepsilon > x+\varepsilon$ έχουμε $B \subseteq A$ ΑΤΟΠΟ

άπειρο πεπερασμένο

ii) 2η περίπτωση: $x > \lambda$.



Έχουμε $\varepsilon>0$: $\lambda < \lambda+\varepsilon < x-\varepsilon < x$.

Από την υπόθεση, το $\Gamma=\{n\in\mathbb{N} : a_n > x-\varepsilon\}$ είναι άπειρο.

Αφού $\lambda=\limsup a_n$, από την ($\Rightarrow$) το $\Delta=\{n\in\mathbb{N} : a_n>\lambda+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

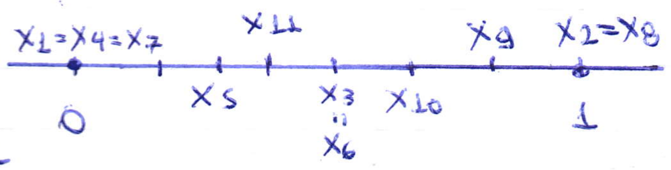
Όμως $\Gamma\subseteq\Delta$ γιατί $\lambda+\varepsilon<x-\varepsilon$

άπειρο πεπερασμένο

Ασκήσεις

$\boxed{30}$ Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1}-x_n\to 0$.
Υποθέτουμε ότι οι a,b είναι οριακά σημεία της (x_n) και $a<b$. Τότε κάθε $\xi\in[a,b]$ είναι οριακό σημείο της (x_n).

Παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας



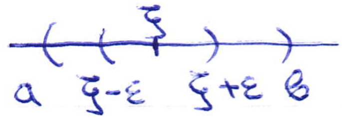
$\to$ 0, 1 είναι οριακά σημεία

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ που δεν είναι οριακό σημείο της (x_n).

Τότε, υπάρχουν $\varepsilon>0$ και $N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$: $x_n\notin(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$

(μπορώ να πάρω ε μικρό ώστε $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\subseteq(a,b)$)



Υπάρχουν άπειροι όροι x_n στο $[a,\xi-\varepsilon)$ (γιατί ο a είναι οριακό σημείο της x_n)

Και άπειροι όροι στο $(\xi+\varepsilon,b]$.
(γιατί ο b είναι οριακό σημείο της (x_n))
Επίσης, αφού $x_{n+1}-x_n\to 0$ για όλους τους x_n έχουμε:
$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$$
Βρίσκω λοιπόν $n_1,n_2\in\mathbb{N}$:
$x_{n_1}\in[a,\xi-\varepsilon)$, $x_{n_2}\in[\xi+\varepsilon,b)$ και για κάθε $n\geq\max\{n_1,n_2\}$: $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$

Συνέχεια ↷

Μάθημα 5ο

Πρόταση

Έστω (a_n) φραγμένη. Τότε $a_n\to a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \limsup a_n = a = \liminf a_n$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Αφού $a_n\to a$, για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n), ισχύει $a_{k_n}\to a$. Άρα $K=\{a\}\Rightarrow$
$$\Rightarrow \underset{\limsup a_n}{\max K} = a = \underset{\liminf a_n}{\min K}$$

($\Leftarrow$) Α' τρόπος: Έστω $\varepsilon>0$

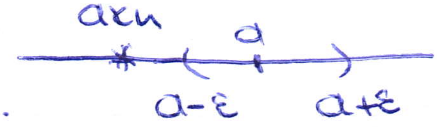
Αφού $a=\limsup a_n$ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n>x+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο $\Rightarrow \exists n_1: \forall n\geq n_1: a_n\leq a+\varepsilon$

Αφού $a=\liminf a_n$ το $\{n\in\mathbb{N}: a_n<x+\varepsilon\}$ είναι

πεπερασμένο $\Rightarrow \exists n_2 : \forall n \geq n_2 : a_n \geq a - \varepsilon$
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.
Τότε $\forall n \geq n_0 : \; a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon$
Άρα $a_n \to a$

<u>Β' τρόπος</u>: Απαγωγή σε άτοπο.

Ξέρουμε ότι $\max K = \min K = a \Rightarrow K = \{a\}$
Έστω ότι $a_n \not\to a$
Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$
Και φυσικά $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$
ώστε $\forall n \; |a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$



(Θ. B-W) Η (a_{k_n}) έχει υπακολουθία $a_{k_{\lambda_n}} \to b$
Τότε $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon \Rightarrow |b - a| \geq \varepsilon \Rightarrow a \neq b$

Άρα, η (a_n) έχει κι άλλο οριακό σημείο: $b \in K = \{a\}$ και $b \neq a$, άρα άτοπο.

<u>ΣΥΜΦΩΝΙΑ</u>

Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε: $\exists a_{k_n} \to +\infty$. <u>Ορίζουμε</u>: $\limsup a_n = +\infty$
Αν η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη τότε: $\exists a_{k_n} \to -\infty$. <u>Ορίζουμε</u>: $\liminf a_n = -\infty$ κ.λ.π.

$\boxed{30}$ (Συνέχεια άσκησης)

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$
Για $n \geq n_0$ έχουμε είτε $x_n \leq \xi - \varepsilon$ ή $x_n \geq \xi + \varepsilon$.

Εξετάζουμε την πρώτη περίπτωση:
Αν $x_n \leq \xi - \varepsilon$, τότε:

$x_{n+1} \notin (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ γιατι $n>n_1$
και $x_{n+1} \notin [\xi+\varepsilon, +\infty)$ γιατι θα ειχαμε
$x_{n+1} - x_n \geq \xi+\varepsilon-(\xi-\varepsilon) = 2\varepsilon$
Ενώ $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$ γιατι $n>n_2$. Αρα $x_{n+1} < \xi-\varepsilon$.
Με τον ίδιο τροπο $x_{n+2} \leq \xi-\varepsilon$, $x_{n+3} \leq \xi-\varepsilon, \ldots$
Δηλαδή $\forall n \geq n_0$ εχουμε $x_n \leq \xi-\varepsilon$.

Τοτε, ο b δεν ειναι οριακο σημειο (γιατι δεν εχουμε απειρους $x_n \in (b-\delta, b+\delta)$, όπου το δ το παιρνω μικρο ωστε $\xi-\varepsilon < b-\delta$.

$\boxed{19}$ νδο. $\limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
$\liminf(a_n+b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$

με (a_n), (b_n) φραγμενες ακολουθιες.

A' τροπος:

Θετω $\liminf(a_n+b_n) = x$
$\liminf(a_n) = y$
$\liminf(b_n) = z$

Υπάρχει υπακολουθια $(a_{k_n}+b_{k_n})$ των (a_n+b_n) ωστε $a_{k_n}+b_{k_n} \to x$
Η (a_{k_n}) ειναι φραγμενη αρα $\exists$ τουλαχιστον μία υπακολουθία της, $a_{k_{\lambda_n}} \to t \geq y$ (B-W).

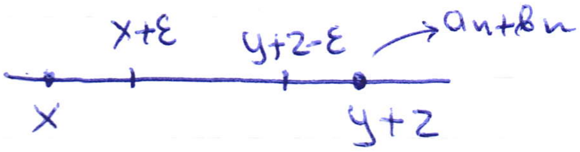
Επισης η $(a_{k_{\lambda_n}}+b_{k_{\lambda_n}})$ ειναι υπακολουθια της $(a_{k_n}+b_{k_n})$

Αρα $\left.\begin{array}{l}(a_{k_{\lambda_n}}+b_{k_{\lambda_n}}) \to x \\ \text{και } a_{k_{\lambda_n}} \to t\end{array}\right\} \Rightarrow b_{k_{\lambda_n}} \to x-t \geq z$

Αρα $x \geq t+z \Rightarrow x \geq y+z$

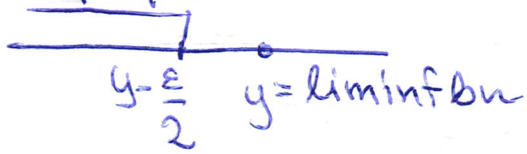
Β' τρόπος:

Έστω ότι $x<y+z$



Υπάρχει $\varepsilon>0$: $x+\varepsilon < y+z-\varepsilon = (y-\frac{\varepsilon}{2})+(z-\frac{\varepsilon}{2})$

περιορ. όρος



$\exists n_1\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_1: a_n \geq y-\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists n_2\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_2: b_n \geq z-\frac{\varepsilon}{2}$

Αν $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ τότε $\forall n\geq n_0: a_n+b_n \geq y+z-\varepsilon$

Αφού $x=\liminf(a_n+b_n)$ υπάρχουν άπειροι $a_n+b_n < x+\varepsilon < y+z-\varepsilon$, Άτοπο

Άσκηση: Αν κάνουμε επιπλέον υπόθεση ότι $a_n\to a$ τότε $\liminf(a_n+b_n) = a + \liminf b_n$

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι $a=\liminf a_n$ (γιατί η (a_n) συγκλίνει) και έχουμε δείξει την "$\geq$". Αρκεί να δείξουμε την "$\leq$".

Υπάρχει $b_{k_n}\to z$ (αφού z οριακό σημείο θα υπάρχει υπακολουθία της (b_n): $b_{k_n}\to z$)
Και $a_{k_n}\to a$ (αφού $a_n\to a$) (+)

$\Rightarrow a_{k_n}+b_{k_n}\to a+z$

Υπακολουθία της (a_n+b_n) άρα το $a+z$ είναι οριακό της σημείο.

Τότε $a+z \geq \liminf(a_n+b_n) = x$

(οριακό σημείο) $\geq$ (το μικρότερο ορ. σημείο)

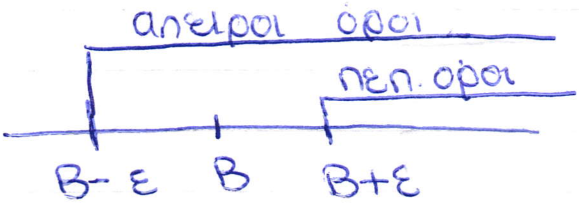
$\boxed{20}$ Έστω $a_n > 0$. Δείξε ότι:

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ειδικότερα αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to x$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to x$

Θέτω $\limsup \sqrt[n]{a_n} = A$

και $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = B$



Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$.

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq B + \varepsilon$$

Γράφουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} &\leq B+\varepsilon \\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} &\leq B+\varepsilon \\ &\vdots \\ \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} &\leq B+\varepsilon \end{aligned}\right\} \overset{(x)}{\Longrightarrow} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} \leq (B+\varepsilon)^k$$

Θέτοντας $N = n_0 + k$ έχουμε: $\forall N > n_0$:

$$\frac{a_N}{a_{n_0}} \leq (B+\varepsilon)^{N-n_0} \Longrightarrow a_N < (B+\varepsilon)^N \cdot \underbrace{\left(\frac{a_{n_0}}{(B+\varepsilon)^{n_0}}\right)}_{=M}$$

Άρα $a_N \leq M \cdot (B+\varepsilon)^N$

Άρα $\forall N > n_0$: $\sqrt[N]{a_N} \leq \sqrt[N]{M} \cdot (B+\varepsilon) \Rightarrow$

[Άσκηση(*): Αν $\forall n \geq n_0$: $a_n \leq b_n$ τότε $\limsup a_n \leq \limsup b_n$]

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \limsup \sqrt[N]{a_N} \leq \limsup\left(\sqrt[N]{M} \cdot (B+\varepsilon)\right) =$$

$$= \lim\left(\sqrt[N]{M} \cdot (B+\varepsilon)\right) = B + \varepsilon$$

Δηλαδή $\limsup \sqrt[N]{a_N} \leq B + \varepsilon$, για τυχόν $\varepsilon > 0$

$$\Downarrow$$

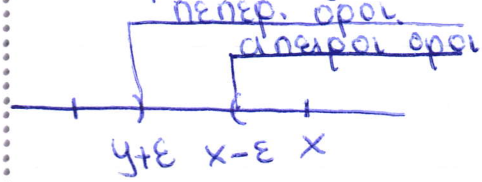
$$\limsup \sqrt[N]{a_N} \leq B = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Αποδειξη Ασκησης ⊛

Έχω $a_n \le b_n$ τελικά.

Έστω ότι $x = \limsup a_n > \limsup b_n = y$

Υπάρχει $\varepsilon > 0$: $y+\varepsilon < x-\varepsilon$



Υπαρχουν απειροι $a_n > x+\varepsilon$
Ολοι τελικα οι $b_n \le y+\varepsilon$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n$ (οσοδηποτε μεγαλο) $a_n > x-\varepsilon$ και $b_n \le y+\varepsilon$

Τοτε $x-\varepsilon < a_n \le b_n \le y+\varepsilon$, ΑΤΟΠΟ.

$\boxed{18}$ Βρείτε το $\limsup a_n$ και το $\liminf a_n$.

i) $a_n = (-1)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$

ii) $a_n = \cos(n\pi/3) + \frac{1}{n+1}$

i) $a_{2n} = -\left(1+\frac{1}{2n}\right) \longrightarrow -1$

και

$a_{2n-1} = 1+\frac{1}{2n-1} \longrightarrow 1$ } Άρα $K \supseteq \{-1,1\}$

Ισχυρισμός:

Αν $x \in K$ τότε $x=-1$ ή $x=-1$

τότε $K=\{-1,1\} \Rightarrow \limsup a_n = 1$ και $\liminf a_n = -1$.

Απόδειξη Ισχυρισμού

Έστω x οριακό σημείο της (a_n).

Υπάρχει $a_{k_n} \longrightarrow x$

Υπάρχουν άπειροι k_n (οι k_{λ_n}) οι οποίοι είναι άρτιοι. Η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι κοινή υπακολουθία των $(a_{k_n}), (a_{2n})$

Τότε $a_{k_n} \to x \Rightarrow a_{k_{\lambda_n}} \to x$
$a_{2n} \to -1 \Rightarrow a_{k_{\lambda_n}} \to -1$ } $x=-1$

Υπάρχουν άπειροι k_n (οι k_{μ_n}) οι οποίοι είναι περιττοί.

Ομοίως, $x = 1$.