Μάθημα 7ο

(I) Σειρές με μή αρνητικούς όρους.

Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η (s_n) είναι αύξουσα.

Απόδειξη

$$s_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ξέρουμε ότι: αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη (για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $s_n \leq M$). Τότε:

$$\exists s \in \mathbb{R} : s_n \longrightarrow s$$

Ενώ αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε:

$$s_n \longrightarrow +\infty.$$

Πρόταση

Αν $a_k \geq 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq M$ (αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη)

Άρα σε αυτήν την περίπτωση $(a_k \geq 0)$ είναι να φράξουμε την (s_n).

Παράδειγμα

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$\underset{2^2}{S_4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$\underset{2^3}{S_8} = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι: $\boxed{S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}}$

Επαγωγικό βήμα: ($n = \frac{\log m}{2\log 2}$, $m = 2^n$: "$S_m \geq 1 + \frac{\log m}{2\log 2}$")

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n\text{-όροι}} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1)\frac{1}{2}$$

Αφού $1 + \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty$ έχουμε $S_{2^n} \longrightarrow +\infty$ (άρα, η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη) $\Longrightarrow s_n \longrightarrow +\infty$

Ειδική περίπτωση: αν φθίνουσα ακολουθία με θετικούς όρους. (π.χ. $\frac{1}{k} \downarrow 0$, $\frac{1}{k^2} \downarrow 0$, $\frac{1}{\ln k} \downarrow 0$)

Κριτήριο Συμπύκνωσης (του Cauchy)

Έστω $a_k \downarrow 0$. Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

(ποιά είναι η δεύτερη σειρά: $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$)

Μερικές εφαρμογές

α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Εδώ $a_k = \frac{1}{k} \downarrow 0$.

Εξετάζουμε την $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k}}$ που αποκλίνει στο $+\infty$.

Άρα, αποκλίνει και η $\sum \frac{1}{k}$.

β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ / $a_k = \frac{1}{k^2} \downarrow 0$ / $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

συγκλίνει (γεωμετρική σειρά με λόγο $x = \frac{1}{2}$)

γ) p-σειρά;
Για κάθε $p > 0$ θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Εδώ $a_k = \frac{1}{k^p} \downarrow 0$. Έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^p)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

Γεωμετρική σειρά, με λόγο $x = \frac{1}{2^{p-1}}$. Συγκλίνει αν και μόνο αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{p-1} > 2^0 \Leftrightarrow p > 1$.

Συμπέρασμα

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει κλπ)
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{k^{\frac{1}{2}}}$

δ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ / $a_k = \frac{1}{k\ln k} \downarrow 0$ /

Θεωρούμε την:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{σταθερό}}}{(\ln 2)} \cdot k}$$ που αποκλίνει.

Άρα η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει.

Απόδειξη του κριτηρίου

($\Leftarrow$) Ξέρουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ συγκλίνει.

άρα τα μερικά αθροίσματα είναι φραγμένα:
υπάρχει $M>0$ ώστε $\forall n$ να ισχύει:
$t_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}} \leq M$

Θα δείξουμε ότι $S_n = a_1 + \dots + a_n \leq M$ για κάθε n.

(τότε η $\sum a_k$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα και θετικούς όρους, άρα συγκλίνει)

Φράσσουμε το:

$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + (a_8+a_9+ \dots + a_{15}) + \dots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n-1}) \overset{a_k\downarrow}{\leq}$

$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = t_n \leq M$

Τώρα για κάθε n έχουμε $n \leq 2^n - 1 \overset{(S_n)\uparrow}{\Longrightarrow} S_n \leq S_{2^n-1} \leq M$

(⇒) Έστω ότι συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Τότε υπάρχει $M>0$:

$$\forall m\in\mathbb{N} \quad s_m = a_1+a_2+\dots+a_m \le M$$

Θα φράξουμε το $t_n = a_1+2a_2+4a_4+\dots+2^{n-1}a_{2^{n-1}} \le$

$$\le 2a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\dots+2^{n-1}a_{2^{n-1}} =$$

$$= 2(a_1+a_2+2a_4+4a_8+\dots+2^{n-2}a_{2^{n-1}}) \overset{a_k\downarrow}{\le}$$

$$\le 2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\dots+a_{2^{n-2}+2}+\dots+a_{2^{n-1}-1}+a_{2^{n-1}}) = 2\, s_{2^{n-1}} \le 2M$$

Αφού η (t_n) είναι άνω φραγμένη από τον $2M$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Ο αριθμός e

Ορίστηκε στο Απειροστικό Ι ως το $\lim_{k\to\infty} a_k$, όπου

$a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

Πρόταση

Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει στο e. Δηλ. $e=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Ένας αριθμός λέγεται αλγεβρικός, όταν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές

Εφαρμογή (ο e είναι άρρητος)

Απόδειξη

Έστω ότι $e \in \mathbb{Q}$. Τότε υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $e = \frac{m}{n}$

Έχουμε $\frac{m}{n} = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{με } n!]{\text{πολ/με}} \underbrace{n! \frac{m}{n}}_{\substack{\text{φυσικός} \\ (n \mid n!)}} = \underbrace{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{\text{φυσικός}} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$\frac{n!}{k!} = (k+1) \cdots n$

$k! \mid n!$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$

Έπεται ότι $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$,

Άρα $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \leq$

$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots <$

$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \boxed{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots} =$

$= \frac{4}{6} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{6} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} < 1$

Απόδειξη της $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \nearrow e$ / Ειδικότερα $a_n < e$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ (θα δείξουμε ότι $S_n \to e$)

Παρατηρούμε $a_n = (\overset{a}{\overset{\shortparallel}{1}} + \overset{b}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{n}}})^n \overset{\left(\substack{\text{διώνυμο του} \\ \text{Νεύτωνα}}\right)}{=}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1) - \dots (n-1)n}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n$$

Επόμενη παρατήρηση:

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και παίρνουμε $N > n$.

Τότε $a_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N-k+1}{N} \cdots \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{1}{k!} \geq$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} \overset{1}{\overset{\uparrow}{\left(1 - \frac{k+1}{N}\right)}} \cdots \overset{1}{\overset{\uparrow}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{k!} \Longrightarrow$$

$$\xRightarrow{N \to +\infty} \underset{\lim a_N}{\underset{\shortparallel}{e}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n$$

(για κάθε n)

Δείξαμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ a_n \leq S_n \Longrightarrow e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &2)\ e \geq S_n\ \forall n \Rightarrow e \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}\right\} e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$