ΜΑΘΗΜΑ 10ο 18/03/15

Κριτήριο του Dirichlet: Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:

(i) Η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι φραγμένη

(ii) Η (b_k) είναι φθίνουσα, και συγκλίνει στο 0 ($b_k \downarrow 0$)

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

ΛΗΜΜΑ (άθροιση κατά μέρη, Abel). Αν $m<n$ τότε

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k-b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m ,$$

όπου $s_k = a_1+\dots+a_k$, $s_0=0$

Απόδειξη: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k b_k \overset{!}{=} \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1})\cdot b_k$

$s_k = s_{k-1}+a_k$

$$= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - \Big(\sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} + s_{m-1} b_m\Big)$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k-b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Απόδειξη: Από το κριτήριο του Cauchy, αρκεί για το τυχόν $\varepsilon>0$ να δείξουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n>m\geq n_0 \quad |a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \dots + a_n b_n| < \varepsilon$

Γράφουμε $|a_m b_m + \dots + a_n b_n| \overset{\text{Λ.Abel}}{=} \Big|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k-b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\Big| \leq$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k-b_{k+1}| + |s_n||b_n| + |s_{m-1}||b_m| \leq$$

$$\underset{(ii)}{\leq} \sum_{k=m}^{n-1} A(b_k-b_{k+1}) + A\cdot b_n + A\cdot b_m = A\big((b_m-b_{m+1})+\dots+(b_{n-1}-b_n)+(b_n)+b_m\big)$$

$$= 2A b_m \underset{m\geq n_0}{\leq} 2A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}$$

(ii) $\to b_k \geq 0$, $b_k - b_{k+1} \geq 0$

Αφού $b_k \to 0$ $\exists n_0: \forall m\geq n_0: b_m < \frac{\varepsilon}{2A}$

Εφαρμογές:

(α) Αν $a_k = (-1)^{k-1}$ τότε $S_n = \begin{cases} 1, & n = \text{περιττός} \\ 0, & n = \text{άρτιος} \end{cases} \Rightarrow (S_n)$ φραγμένη

Άρα, αν $\beta_k \downarrow 0$ έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \beta_k = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4$ συγκλίνει.

Αυτό είναι το κριτήριο του Leibniz.

- $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει $(\beta_k = \frac{1}{k} \downarrow 0)$
- $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ —//—
- $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k+1)}$ —//—

Καμία απ' αυτές δεν συγκλίνει απολύτως

(β) Έστω $0 < x < \pi$ και έστω $a_k = \cos(kx)$

Η $s_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ είναι φραγμένη

Γράφουμε $s_n = \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}} \left(2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos x + 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos 2x + \dots + 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cos nx\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}} \left(\left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \dots + \left(\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right) \right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}}$$

Άρα, $|s_n| \leq \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x| + |\sin\frac{x}{2}|}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}} \leq \frac{2}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}}$

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

(1) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(3) $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha$

(4) $\nearrow$ $\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$

Απόδειξη της (1)

<u>Παράδειγμα</u>: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει για κάθε $x\in(0,\pi)$

Θέτουμε $a_k=\cos kx \longrightarrow$ Είδαμε ότι $|S_n|=|a_1+\dots+a_n| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$

$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \downarrow 0$ Επομ. η (S_n) είναι φραγμένη $\overset{\shortparallel}{A}(x)$

* <u>Τυπικά παραδείγματα φραγμένης (S_n)</u>.

(1) $a_k = (-1)^{k-1} \longrightarrow$ Leibniz

(2) $a_k = \cos kx$ ή $\sin kx$

Ασκήσεις

(25) Έστω $a_k \geq 0$. Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 \cdot a_k}$ συγκλίνει.

- Αν $a_k > 0$ έχουμε: $\frac{a_k}{1+k^2 \cdot a_k} < \frac{a_k}{k^2 \cdot a_k} = \frac{1}{k^2}$

- Αν $a_k = 0$ τότε $\frac{a_k}{1+k^2 \cdot a_k} = 0 < \frac{1}{k^2}$

Άρα $\forall k \in \mathbb{N}$: $0 \leq \frac{a_k}{1+k^2 \cdot a_k} < \frac{1}{k^2}$ και η $\sum_k \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

$\xRightarrow[\text{σύγκρισης}]{\text{κριτ.}}$ $\sum_k \frac{a_k}{1+k^2 \cdot a_k}$ συγκλίνει.

(26) $a_k = \begin{cases} 1/k, & \text{αν ο } k \text{ είναι τέλειο τετράγωνο } (k=m^2 \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{k^2}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$1, 1/2^2, 1/3^2, 1/4, 1/5^2, 1/6^2, 1/7^2, 1/8^2, 1/9, 1/10^2$

$1 \to 1/1^2$, $1/4 \to 1/2^2$, $1/9 \to 1/3^2$

ΝΔΟ Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους, αρκεί νδο η $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ είναι άνω φραγμένη

Θεωρούμε τον $S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k: \text{ τέλειο τετρ.}}} a_k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k: \text{ όχι τέλειο τετρ.}}} a_k =$

$= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k: \text{ τέλειο τετρ.}}} 1/k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k: \text{ όχι τέλειο τετρ.}}} 1/k^2 =$

$= \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s^2} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k: \text{ όχι τέλειο τετρ.}}} 1/k^2 \leq \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k^2}$

(γιατί έχουμε δει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \leq 2$)

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n \leq n^2$, άρα $S_n \leq S_{n^2} \leq 4$

Ερωτήσεις Κατανόησης

(11) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και (a_{s_k}) είναι μία υπακολουθία της (a_k) τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{s_k}$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ. Αντιπαράδειγμα: $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$H \ \sum_k a_k = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ συγκλίνει (Leibniz)}$$

Όμως, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = 1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots$ αποκλίνει, γιατί:

Θεωρώ την $\beta_k = \frac{1}{k}$. Αν $\gamma_k = \frac{1}{2k-1}$ και

$$\frac{\gamma_k}{\beta_k} = \frac{k}{2k-1} \to \frac{1}{2} > 0 \text{ . Άρα η } \sum_k \frac{1}{2k-1}$$

συμπεριφέρεται σαν την $\sum_k \beta_k = \sum_k \frac{1}{k}$ που αποκλίνει

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $a_k \geq 0$ τότε η απάντηση είναι ΝΑΙ.

(1) Αφού η $\sum_k a_k$ συγκλίνει, $\exists A > 0 : \forall n : a_1 + \ldots + a_n \leq A$

(2) Έστω (a_{s_k}) υπακολουθία της (a_k). Για κάθε n έχουμε: $t_n \underset{\varphi o}{=} a_{s_1} + a_{s_2} + \ldots + a_{s_n} \leq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{s_n} \leq A$.

$(S_1 < S_2 < \ldots < S_n) \quad a_k \geq 0$

Άρα η $\sum_k a_{s_k}$ συγκλίνει

(12) Αν $a_k > 0$ και η $\sum_k a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_k a_k^2$ συγκλίνει

ΣΩΣΤΟ: $\frac{a_k^2}{a_k} = a_k \to 0$. Άρα εφαρμόζεται το οριακό κριτήριο σύγκρισης
η σειρά συγκλίνει

$$2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 \cdots 2\cdot k = \frac{}{k!} = \frac{2^k \cdot k!}{k!}$$

(13) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ!

1ος τρ) Παρατηρούμε ότι $a_k = \frac{2^k k!}{k!} \longrightarrow +\infty$

Αφού $a_k \not\to 0$ η σειρά αποκλίνει.

2ος τρ) Κριτήριο Λόγου

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2k+2)}{(k+1)!}}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}} = \frac{k!(2k+2)}{(k+1)!} = \frac{2k+2}{k+1} =$$

$$= 2 \to 2 > 1$$

Άρα, η σειρά αποκλίνει

(24) (α) $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{-k^2}$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p,\ p>0$

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p (1/\sqrt{k} - 1/\sqrt{k+1})$

(α) Κριτήριο Ρίζας: $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{(1+1/k)^{-k^2}} = \left((1+1/k)^{-k^2}\right)^{1/k} =$

$$= (1+1/k)^{-k^2\cdot\frac{1}{k}} = (1+1/k)^{-k} =$$

$$= 1/(1+1/k)^k \to 1/e < 1.$$

Συγκλίνει

(β) $a_k = p^k \cdot k^p$ / $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p^{k+1}\cdot(k+1)^p}{p^k \cdot k^p} = p\cdot(1+1/k)^p \xrightarrow{k\to\infty}$

$$\longrightarrow p\cdot 1^p = p$$

- Αν $0<p<1$, η σειρά συγκλίνει
- Αν $p>1$, η σειρά αποκλίνει
- Αν $p=1$ τότε έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} k$ που αποκλίνει, γιατί $k \not\to 0$ όταν $k\to\infty$