ΜΑΘΗΜΑ 11º 20/03/15

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ:</u>

(29) Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.
Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $a_k \to 0$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, για το τυχόν $\varepsilon>0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n>k\geq k_0$:
$|a_k+\dots+a_n|<\varepsilon$

Παίρνω $n\geq 2k_0$ και $k=k_0$.
Γι' αυτούς τους n και k έχουμε:

$$\frac{n}{2}a_n \leq \left(n-\frac{n}{2}+1\right)a_n < (n-k+1)\,a_n \underset{a_n\downarrow}{\leq} a_k+\dots+a_n \underset{a_n>0}{=} |a_k+\dots+a_n| < \varepsilon/2$$

Άρα, για κάθε $n\geq 2k_0$ έχουμε: $\frac{n}{2}\cdot a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή
$0<n\cdot a_n<\varepsilon$.

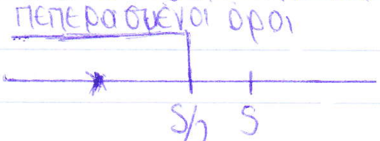
Άρα $n a_n \to 0$

Ερώτηση: Ισχύει το ίδιο αν υποθέσουμε απλώς ότι $a_k>0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει;
απάντηση: <u>ΟΧΙ</u>
Αντιπαράδειγμα: $a_k = \begin{cases} 1/k &, k=m^2 \\ 1/k^2 &, \text{αλλιώς} \end{cases}$

Η $\sum a_k$ συγκλίνει (Άσκηση 26). Παρατηρούμε ότι $m^2\cdot a_{m^2} = m^2\cdot\frac{1}{m^2} = 1$

Άρα η (a_k) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο 1.
Συνεπώς $k\cdot a_k \not\to 0$

(E22) Έστω $a_k>0$. Αν $\sum a_k$ συγκλίνει τότε $\liminf(k a_k)=0$.
Έχουμε $k a_k>0 \Rightarrow \liminf(k a_k)\geq 0$
Έστω ότι $\liminf(k a_k)=S>0$



Οι όροι $k\cdot a_k$ που είναι μικρότεροι από $S/2$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος $\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k\geq k_0: k a_k \geq \frac{S}{2}$

Αφού η $\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

(33) Έστω $a_k \geq 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

[Αν $a_k \geq 0$ τότε: "$\sum a_k < \infty$" σημαίνει: Η σειρά συγκλίνει
αλλιώς γράφουμε $\sum a_k = +\infty$]

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1$.

(δηλ. $\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \dots$)

Πρέπει νδο $S_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \dots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$

Γράφουμε
$$S_n = \left(1 - \frac{1}{1+a_1}\right) + \left(\frac{1}{1+a_1} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\right) + \left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}\right) + \dots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \longrightarrow 1$

Αρκεί νδο $\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \to 0 \Leftrightarrow (1+a_1)\cdots(1+a_n) \to +\infty$

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + \dots + a_n > a_1 + a_2 + \dots + a_n \longrightarrow +\infty$

γιατί η $\sum a_k$ αποκλίνει

(38) Έστω $a_k>0$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει

$\sum a_k$ συγκλίνει

$\Downarrow$

$a_k \to 0$

$\Downarrow$

Τελικά, $0<a_k<1$ και $\frac{k}{k+1}<1$

Άρα, $a_k \le a_k^{\frac{k}{k+1}}$

Παρατηρούμε ότι

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} = \frac{a_k}{a_k^{\frac{1}{k+1}}} \le 2\cdot a_k \overset{\alpha\nu}{\iff} a_k^{\frac{1}{k+1}} \ge \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff a_k \ge \frac{1}{2^{k+1}}$$

• Αν $a_k \ge \frac{1}{2^{k+1}}$ τότε $a_k^{\frac{k}{k+1}} \le 2\cdot a_k$

• Αν $a_k < \frac{1}{2^{k+1}}$ τότε $a_k^{\frac{k}{k+1}} < \frac{1}{(2^{k+1})^{\frac{k}{k+1}}} = \frac{1}{2^k}$

Άρα για κάθε k: $0 \le a_k^{\frac{k}{k+1}} \le 2\cdot a_k + \frac{1}{2^k}$

Όμως, η $\sum\left(2\cdot a_k + \frac{1}{2^k}\right)$ συγκλίνει γιατί οι $\sum a_k$, $\sum \frac{1}{2^k}$ συγκλίνουν

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_k a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

(34) $a_k \searrow 0$. Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, \frac{1}{k}\} = +\infty$ (αποκλίνει)

Η $\beta_k = \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$ είναι φθίνουσα και μηδενική (φθίνει στο 0).

• $0 \le \beta_k = \min\{a_k, 1/k\} \le \frac{1}{k} \to 0$. Άρα $\beta_k \to 0$.

• $\left.\begin{matrix} a_{k+1} \le a_k \\ \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \min\{a_{k+1}, \frac{1}{k+1}\} \le$

$a_k \Rightarrow \min\{a_{k+1}, \frac{1}{k+1}\} \le \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$

$\frac{1}{k} \Rightarrow \beta_{k+1} \le \beta_k$.

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_k, \frac{1}{k}\}$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \beta_{2^k} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \min\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\}$

Ας υποθέσουμε ότι $\sum \beta_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\} < +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \min\{2^k a_{2^k}, 1\} \to 0 \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \ge k_0 \ \min\{2^k a_{2^k}, 1\} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \ge k_0 : \min\{2^k a_{2^k}, 1\} = 2^k a_{2^k}$

Άρα, η $\sum_{k=k_0}^{\infty} \min\{2^k a_{2^k}, 1\} = \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

$\Downarrow$

η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \xrightarrow[\text{συμπύκν. για την } (a_k)]{\text{κριτ.}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ Άτοπο

Ε 11-12

11a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{10}}{10^{k+1}} \cdot \frac{10^k}{k^{10}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{10} \cdot \frac{1}{10} \to 1^{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1$$

11 γ. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$

Για κάθε σταθερό $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$$

Άρα "για μεγάλα x", ισχύει $e^x > x^m$

Π.χ. $e^x > x$, $e^x > x^2$, $e^x > x^4$, $e^x > x^{1000}$ ...

αρκεί το x να είναι μεγάλο

Μάλιστα, ΥΠΕΝΘ: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$\Rightarrow \forall x > 0: e^x > 1, e^x > x, e^x > \frac{x^2}{2}, e^x > \frac{x^3}{6}$ κλπ.

Έχουμε $e^{-\sqrt{k}} = \frac{1}{e^{\sqrt{k}}} < \frac{24}{k^2}, \forall k$

Αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η $\sum e^{-\sqrt{k}}$ συγκλίνει κ' αυτή.

(12) (α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$, (β) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^6}$, (γ) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{\ln k}$,

(δ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$, (ε) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (\ln k)^2}$, (στ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^k}$, (ζ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

(θ) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^p}\right)$, $p>0$

Λύση:

(γ) $\frac{1}{\ln x} \downarrow 0$, η σειρά είναι εναλλάσσουσα (Κρ. Leibniz)

(στ) $\sqrt[k]{\frac{1}{(\ln x)^k}} = \frac{1}{\ln x} \longrightarrow 0<1$. Συγκλίνει από κριτήριο ρίζας

(α) Αν $k \geq 3$ τότε $\ln k \geq \ln 3 > \ln e = 1$, δηλαδή $\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}$.

Αφού η $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, έχουμε $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ αποκλίνει →

→ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ αποκλίνει.

(δ) και (ε) με κριτ. συμπύκνωσης:
H (δ) αποκλίνει και η (ε) συγκλίνει

H $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{k(\ln k)^2}_{\downarrow 0}}$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{2^k} \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}(\ln 2^k)^2} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^2} \cdot \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

(ζ) Συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(k \ln 2)^{k \ln 2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{(k \cdot \ln 2)^{\ln 2}}\right)^k}_{\beta_k}$

Σε αυτήν εφαρμόζω το κριτήριο ρίζας:
$\sqrt[k]{\beta_k} = \frac{2}{(k \ln 2)^{\ln 2}} \longrightarrow 0<1$.

(α) (Ισχύει $\ln(1+1/k^p) \to \ln(1+0) = \ln 1 = 0$, γιατί $p>0$ άρα $1/k^p \to 0$)

Ισχύει $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+y}}{1} = 1$.

Αφού $\dfrac{1}{k^p} \to 0$ έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{k^p}\right)}{\frac{1}{k^p}} = 1$.

Άρα, η $\sum \ln(1+\frac{1}{k^p})$ συμπεριφέρεται σαν

την $\sum \frac{1}{k^p}$ δηλαδή συγκλίνει αν $p>1$
και αποκλίνει αν $0<p\leq 1$.

(β) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(\ln k)^m}{k} = 0$, όποιος κι αν είναι ο φυσικός m

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^m}{x} \overset{DLH}{=} 0$

<u>Άρα</u>, [για "μεγάλα" k] $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 : (\ln k)^6 < k \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(\ln k)^6} > \dfrac{1}{k} \Leftarrow$ αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

$\Downarrow$

$\sum \dfrac{1}{(\ln k)^6} = \infty$