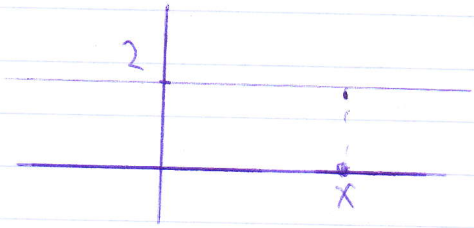
ΜΑΘΗΜΑ 13º 27/03/15

Ομοιόμορφη Συνέχεια

Συνέχεια: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

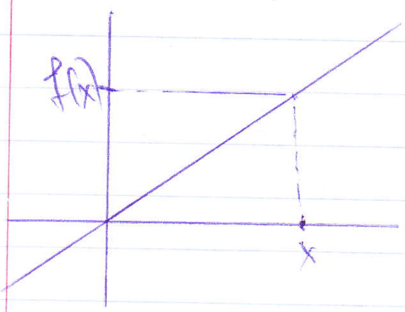
Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: αν $y \in A$ και $|y-x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Παραδείγματα: (α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2$



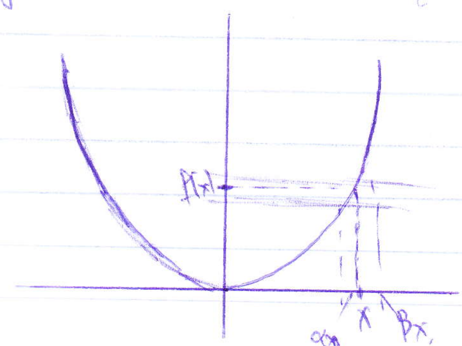
Έστω $x \in \mathbb{R}$
Έστω $\varepsilon > 0$
Μπορώ να επιλέξω οποιοδήποτε $\delta > 0$: αν $y \in \mathbb{R}$ και $|y-x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| = |2-2| = 0 < \varepsilon$

(β) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Έστω $x \in \mathbb{R}$



Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \varepsilon > 0$
Αν $y \in \mathbb{R}$ και $|y-x| < \delta = \varepsilon$ τότε
$|f(y) - f(x)| = |y-x| < \varepsilon$
(Το δ που επιλέξαμε εξαρτάται από το ε που μας έδωσαν, όχι όμως από το σημείο x στο οποίο ελέγχαμε τη συνέχεια)

(γ) $f(x) = x^2$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)



Έστω (π.χ.) $x > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$
1ος τρόπος: Θα απαιτήσουμε $0 < \delta < 1$.
Αν $|y-x| < \delta$ τότε
$|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| =$
$= |y-x||y+x| \leq (|y| + |x|)|y-x| <$
$< (1 + 2|x|)|y-x| < \varepsilon$
αν $|y-x| < \varepsilon / (1+2|x|)$

$|y| = |y-x| + |x| <$
$< \delta + |x| < 1 + |x|$

Ορίζουμε $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x|}\right\} > 0$

και το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι αν $|y-x|<\delta$ τότε $|f(y) - f(x)| \leq \ldots < \varepsilon$

Μπορώ να διαλέξω το δ καλύτερα;
Για κάθε $y \in (\alpha_x, \beta_x) = \left(\sqrt{x^2-\varepsilon}, \sqrt{x^2+\varepsilon}\right)$ έχουμε (από το σχήμα) $|y^2-x^2|<\varepsilon$

Έχουμε $x-\sqrt{x^2-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{x+\sqrt{x^2-\varepsilon}} \rightarrow \sqrt{x^2+\varepsilon}-x < x-\sqrt{x^2-\varepsilon}$

$\sqrt{x^2+\varepsilon} - x = \frac{\varepsilon}{x+\sqrt{x^2+\varepsilon}}$ Άρα για δ μπορώ να βρω:

$$\delta = \sqrt{x^2+\varepsilon} - x = \frac{\varepsilon}{x+\sqrt{x^2+\varepsilon}}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Λέμε ότι η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι <u>ομοιόμορφα συνεχής</u> αν <u>για δοσμένο $\varepsilon>0$</u> μπορούμε να ελέγξουμε τον ορισμό της συνέχειας <u>σε κάθε $x \in A$</u> με δ που εξαρτάται

<u>Αυστηρά:</u> Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in A$ και για κάθε $y \in A$ με $|y-x|<\delta$ ισχύει $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$

<u>Αλλιώς</u>, $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$: για κάθε ζεύγος $x, y \in A$ με $|y-x|<\delta$ ισχύει $|f(y) - f(x)|<\varepsilon$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> (1) Η $f(x)=x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

<u>Παίρνουμε $\varepsilon=1$.</u> Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα: "αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y-x|<\delta$ τότε $|y^2-x^2|<1$"

Τότε $\forall x>0$ και για $y=x+\delta/2$ έχουμε $|y-x| = \frac{\delta}{2} < \delta$ άρα θα πρέπει $|(x+\delta/2)^2-x^2|<1$

$\rightarrow x^2+\delta x+\frac{\delta^2}{4}-x^2<1 \Rightarrow \delta x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{\delta}$, για κάθε $x>0$
<u>Άτοπο</u>

(2) Αν η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι συνεχής

Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$: αν $y, z \in A$ και $|y - z| < \delta$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.
Ειδικότερα, αν $y \in A$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

Άρα η f είναι συνεχής στο x.

(3) Η ομοιόμορφη συνέχεια εξαρτάται "από το σύνολο στο οποίο ορίζεται η f".

$g(x) = x^2$, $g: [-M, M] \to \mathbb{R}$

Έχουμε $|g(y) - g(x)| = |y^2 - x^2| = |y - x||y + x| \leq (|y| + |x|)|y - x| \leq$
$\leq 2M|y - x|$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Τότε, αν $x, y \in [-M, M]$ και $|y - x| < \delta$ έχουμε
$|g(y) - g(x)| \leq 2M|x - y| < 2M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται Lipschitz συνεχής με σταθερά $L > 0$ αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε τέτοια f είναι ομοιόμορφα συνεχής (για δοθέν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/2$)

// ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών.

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

(β) Για κάθε ζευγάρι ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στο A που ικανοποιούν την $y_n - x_n \to 0$ ισχύει $f(y_n) - f(x_n) \to 0$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $(x_n), (y_n)$ δύο ακολουθίες στο A με $y_n - x_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι $f(y_n) - f(x_n) \to 0$

Έστω $\varepsilon > 0$ θα βρούμε n_0: $\forall n \geq n_0$: $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$

Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

(*) "Αν $x, y \in A$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$"

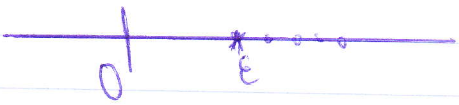
Αφού $y_n - x_n \to 0$ $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $|y_n - x_n| < \delta$.
Τότε $\forall n \geq n_0$ η (*) μας δίνει $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$

(β) $\Rightarrow$ (α). Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in A$ ώστε $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

Εφαρμόζοντας αυτό με $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Βρίσκουμε $x_n, y_n \in A$ με $|x_n - y_n| < 1/n$
αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Τότε $|y_n - x_n| < 1/n \Rightarrow y_n - x_n \to 0$
Από υπόθεση $f(y_n) - f(x_n) \to 0$
Άτοπο γιατί $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε n

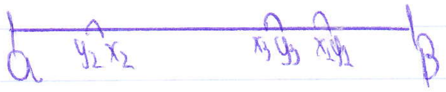


// Απόδειξη ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ: Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Όπως στην απόδειξη της $(\beta) \to (\alpha)$

Βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ και $x_n, y_n \in [\alpha, \beta]$

με $y_n - x_n \to 0$ αλλά $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, για κάθε n.



Από το ΘΕΩΡΗΜΑ Bolzano-Weierstrass η (x_n) είναι υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει: $x_{k_n} \to z \in [\alpha, \beta]$ $\left(\alpha \leq \underset{\downarrow \atop z}{x_{k_n}} \leq \beta \right)$

Έχουμε $y_n - x_n \to 0 \Rightarrow y_{k_n} - x_{k_n} \to 0$

άρα $y_{k_n} = (y_{k_n} - x_{k_n}) + x_{k_n} \to 0 + z = z$

Αφού η f είναι συνεχής στο z, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε

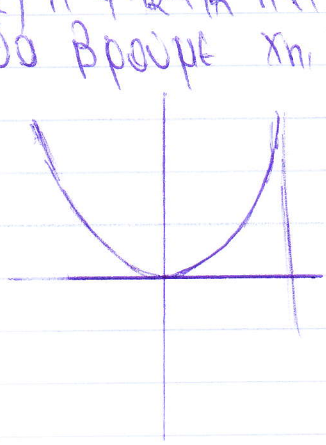
$$\left.\begin{array}{l} f(x_{k_n}) \to f(z) \\ f(y_{k_n}) \to f(z) \end{array}\right\} \Rightarrow f(y_{k_n}) - f(x_{k_n}) \to f(z) - f(z) = 0$$

Άτοπο γιατί $|f(y_{k_n}) - f(x_{k_n})| \geq \varepsilon, \forall n$

Παραδείγματα:

(1) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η $f(x) = x^2$ είναι ομοιόμ. συνεχής

Θα βρούμε $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ με $y_n - x_n \to 0$ και $y_n^2 - x_n^2 \not\to 0$



Παίρνω $x_n = n$

και $y_n = n + 1/n$

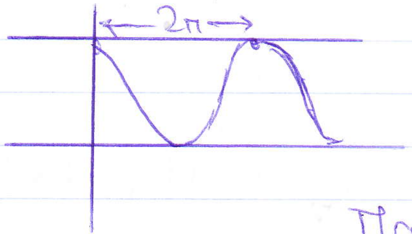
Έχουμε $y_n - x_n = 1/n \to 0$

Όμως $f(y_n) - f(x_n) = y_n^2 - x_n^2 =$

$= (n + 1/n)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2 \frac{1}{n} n + 1/n^2 - \cancel{n^2} =$

$= 2 + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 2 \neq 0$

(2) Υπάρχουν φραγμένες συνεχείς $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που <u>δεν</u> είναι ομοιομ. συνεχείς
Π.χ. η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x^2)$



$$\sqrt{2(n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2(n+1)\pi} + \sqrt{2n\pi}} \to 0$$ όταν $n \to \infty$

Παραγωγίζω την f:
$|f'(x)| = |-2x\sin(x^2)|$ $= 2 \cdot \sqrt{2n\pi + \pi/2} \to \infty$
Για $x_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2}$

Ορίζουμε $x_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2}$
$y_n = \sqrt{2n\pi}$

Τότε $$x_n - y_n = \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi + \pi/2} + \sqrt{2n\pi}} \to 0$$

Αλλά $f(x_n) - f(y_n) = \cos(x_n^2) - \cos(y_n^2) =$
$= \cos(2n\pi + \pi/2) - \cos(2n\pi) =$
$= 0 - 1 = -1 \not\to 0$

Άρα η f δεν είναι ομ. συν.