Ανάλυση 2
1/4/15

I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής

– Πώς θα ελέγχουμε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

1) ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε είναι ομ. συν.

2) Lipschitz $\Rightarrow$ ομ. συν
$\not\Leftarrow$ (πχ η $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[0,1]$)

3) Αν η f είναι παραγ/μη στο εσωτερικό του I τότε
f Lipschitz $\Leftrightarrow$ f' φραγμένη.

4) ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής ($a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα)
Τότε η f είναι ομ. συν αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

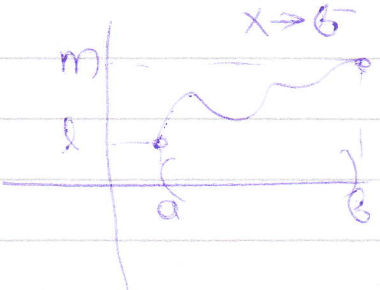
Χρειαζόμαστε ένα λήμμα
ΛΗΜΜΑ: Αν $f: A \to \mathbb{R}$ ομ. συν τότε για κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο A η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι βασική.
("η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες")

Απόδειξη: Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο A.
Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική.
Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall\, n,m \geq n_0$ $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.
Αφού η f είναι ομ. συν $\exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0$:
"Αν $u,v \in A$ και $|u-v|<\delta$ τότε $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$" (*)
Αφού η (x_n) είναι βασική $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall\, n,m \geq n_0$ $|x_n-x_m|<\delta$
$\Downarrow^{*}$
$\forall\, n,m \geq n_0$ $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$

Παράδειγμα
Το αντίστροφο δεν ισχύει
Η $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ δεν είναι ομ. συν

Έστω (x_n) βασική στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : x_n \to x$
$\Rightarrow f(x_n) = x_n^2 \to x^2 = f(x) \Rightarrow$ η $(f(x_n))$ συγκλίνει
$\Rightarrow$ η $(f(x_n))$ είναι βασική.

Απόδειξη του Θεωρήματος ($\Leftarrow$) Έστω ότι $\ell = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $m = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$



Ορίζουμε $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ως εξής

$$F(x)=\begin{cases}\ell, & x=a\\ f(x), & a<x<b \\ m, & x=b\end{cases}$$

Η F είναι συνεχής στο $[a,b]$

· $\lim\limits_{x\to b^-}F(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = m = F(b)$

άρα η F είναι συνεχής στο b

· Ομοίως, $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\ell=F(a)$ άρα F συνεχής στο a
κτλ

Αφού η F είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα (το $[a,b]$), η F είναι ομ. συνεχής.

$\Downarrow$ Άσκηση

$F|_{(a,b)}$ ομοιομόρφα συνεχής

$\Downarrow$

f.

Άσκηση

$f: A\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής. Αν $B\subseteq A$ τότε η $f|_B: B\to\mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists\, \delta>0$ "$\forall\, x,y\in A$ με $|x-y|<\delta$ έχουμε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$"

$\Downarrow$ $B\subseteq A$

"$\forall\, x,y\in B$ με $|x-y|<\delta$ ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$"

$\Rightarrow f|_B$ ομ. συν

($\Longrightarrow$) Έστω ότι η $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ (όμοια για το $\lim_{x\to a^+} f(x)$)

<u>ΒΗΜΑ 1ο:</u> Παίρνουμε κάποια (y_n) στο (a,b) με $y_n \to b$. Η (y_n) συγκλίνει άρα είναι βασική

$\xrightarrow[\text{ΛΗΜΜΑ}]{}$ η $(f(y_n))$ είναι βασική.

$\Longrightarrow \exists\ m \underset{\text{ορ}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

<u>ΒΗΜΑ 2ο:</u> $\lim_{x\to b^-} f(x) = m$ (1).

Θεωρούμε τυχούσα (x_m) στο (a,b) με $x_m \to b$. Θα δείξουμε ότι $f(x_m)\to m$
(Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, έπεται η (1)).

Έχουμε $\left.\begin{matrix} y_n \to b \\ x_m \to b \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_n - x_m \to 0$

$\xrightarrow[\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}]{\text{f. ομ. συν}}$ $f(y_n) - f(x_m) \to 0$

Αφού $f(y_m) \to m$ έχουμε

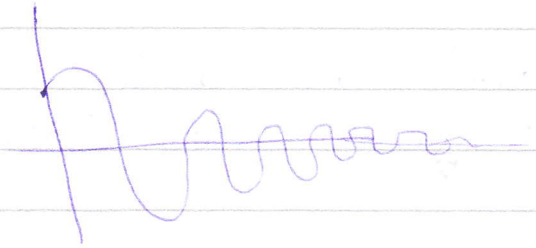
$f(x_m) = f(y_m) - (f(y_m) - f(x_m))$
$\longrightarrow m - 0 = m$

(5) Στην περίπτωση $I = [a,+\infty), (-\infty, b], (-\infty,+\infty)$
$(a,+\infty), (-\infty, b)$ έχουμε διάφορα κριτήρια

Άσκηση 8: Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής, με $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

(ισοδύναμα: $\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, M=M(\varepsilon)>0 : \forall\, x\geq M \quad |f(x)|<\varepsilon$)

Τότε η f είναι ομ. συνεχής



Έστω $\varepsilon>0$.
Υπάρχει $M=M(\varepsilon)>0$:
$\forall\, z\geq M \quad |f(z)|<\varepsilon/3$
(αυτό ισχύει γιατί $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$)

Η f είναι συνεχής στο $[0,M]$ άρα ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,M]$.
Άρα υπάρχει $\delta>0$: αν $x,y\in[0,M]$ και $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (*)

Έστω $x,y\in[0,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

α) $0\leq x,y\leq M$ και $|x-y|<\delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$

β) $x,y\geq M \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leq|f(x)|+|f(y)| \overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$
(εδώ δεν χρειάζεται και η υπόθεση $|x-y|<\delta$)

γ) $x<M<y$ και $|x-y|<\delta$
Τότε $x,M\in[0,M]$ και $|x-M|<|x-y|<\delta \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$|f(x)-f(M)|<\varepsilon/3$

και $M,y\geq M \overset{(**)}{\Longrightarrow} |f(M)|<\varepsilon/3$ και $|f(y)|<\varepsilon/3$

Ασκηση 9: Εστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Τότε, η f είναι ομοιομόρφως συνεχής

Ορίζουμε $g(x) = f(x) - l$
$h(x) = l$ στο $[0,+\infty)$ αυτές είναι συνεχεις και

i) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l - l = 0 \underset{\alpha\sigma\kappa\, 8}{\Longrightarrow} g$ ομ. συν.

ii) h σταθερη $\Rightarrow$ h ομ. συν
Απο την ασκ 7(α) η $f = g + h$ είναι ομ. συν

Ασκηση 14: Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομ. συν

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x+1$. Ναι: $f'(x) = 3 \ \forall x \Rightarrow f'$ φραγμ.

2) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Αφού $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{1}{x} = 0$

ΝΑΙ.
Αλλος τρόπος
$|f'(x)| =$
$= \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \overset{x\geq 2}{\leq} \frac{1}{4}$
άρα f' φραγμενη
$\Rightarrow$ ΝΑΙ

3) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\sin^2 x$

Εξετάζουμε αν υπάρχει το

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\sin^2 x = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0}$

$= 1 \cdot 0 = 0$

ΝΑΙ.

4) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

5) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

6) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sin}{x}$

$(a,+\infty)\to\mathbb{R}$
Αν η f είναι ομ. συν στο $(a,+\infty)$ τότε είναι και στο $(a,a+1]$

$\Downarrow$

$\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$

4) $\nexists \lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ (Άρα η f δεν είναι ομ. συν)

Διότι αν $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0^+$ τότε

$\sin\frac{1}{x_n}=\sin(2n\pi)=0\to 0$

ενώ αν $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0^+$ τότε $\sin\frac{1}{y_n}=1\to 1$

5) Ισχύει $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\sin\frac{1}{x}=2$

Αν $x_n\to 0^+$ τότε $\left.\begin{array}{l} x_n\to 0 \\ \sin\frac{1}{x} \text{ φραγμ.}\end{array}\right\}\Rightarrow x_n\sin\frac{1}{x_n}\to 0$

Παραγωγίζω: $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$

Αν $x\geq 1$ τότε $|f'(x)|\leq\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{1}{x}\cdot\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1+\frac{1}{x}\leq 2$

Στο $[1,+\infty)$ η f' είναι φραγμένη, άρα η f είναι ομ. συν.

Στο $(0,1]$ η f είναι ομ. συν γιατί $\exists \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

Με "κόλλημα" η f είναι ομ. συν στο $(0,+\infty)$

6) ΝΑΙ (α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, άρα μπορώ να επεκτείνω την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,+\infty)$

β) $\exists \lim \frac{\sin x}{x} = 0 \xRightarrow{\text{Άσκ 8}}$ η f είναι ομ. συν

11) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin x$.

$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$ (η f΄ δεν είναι φραγμένη)

$x_n = 2n\pi$
$y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$

$y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$.

$f(y_n) - f(x_n) = (2n\pi + \frac{1}{n}) \cdot \sin(2n\pi + \frac{1}{n}) - \cancel{2n\pi \sin 2n\pi}$

$= 2n\pi \cdot \sin\frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n}} \sin\frac{1}{n}^{\to 0} \longrightarrow 2\pi \cdot 1 + 0$
$= 2\pi \neq 0$

$\cancel{2n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}^{\to 1}} \to 2n$

άρα δεν είναι ομ. συν.