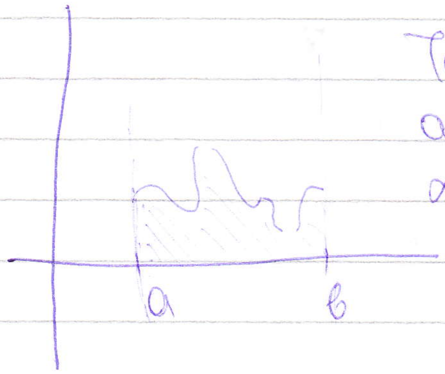
Απει ΙΙ
2014

Σάββατο 9/5
πρόοδος

Ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση

(Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι $f\geq 0$

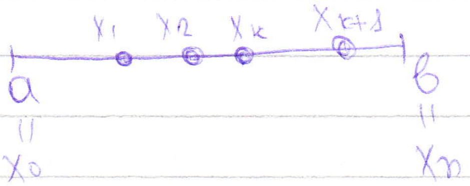


Τότε θέλουμε να ορίσουμε αυστηρά το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην γρ. παράσταση της f, την ευθεία $y=0$ τις ευθείες $x=a$, $x=b$)

Θα προσεγγίσουμε το "εμβαδόν κάτω από την f" από πάνω και από κάτω.

Ορισμοί

1) Διαμέριση του $[a,b]$ λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο P του $[a,b]$ με την ιδιότητα ότι $a\in P$ και $b\in P$. Δηλ. $P=\{a=x_0<x_1<x_k<x_{k+1}<x_n=b\}$



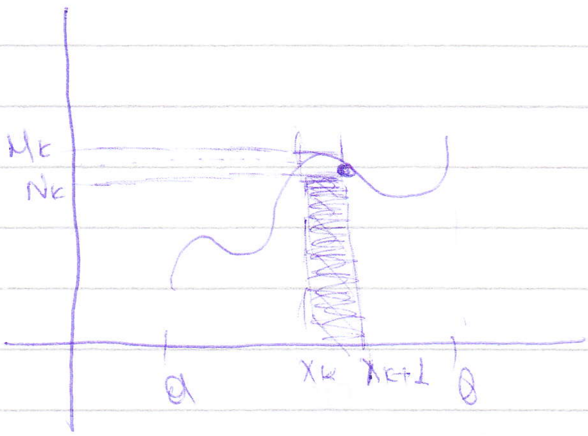
2) Εκλέπτυνση της διαμέρισης P λέμε κάθε διαμέριση Q του $[a,b]$ με $P\subseteq Q$

3) Αν P,Q είναι διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε θα έχω απαραίτητα $P\subseteq Q$ ή $Q\subseteq P$

Το συνολο $P \cup Q$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ (Είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $[a,b]$, $a, b \in P \cup Q$) και λέγεται κοινή εκλέπτυνση των P και Q.

4) Το πλάτος της διαμέρισης ~~P είναι~~
$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < x_n = b\}$$
Είναι το μεγαλύτερο απο τα μήκη των υποδιαστημάτων που ορίζει η P

$$\|P\| = \max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$$



Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, φραγμένη και έστω
$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_k, x_{k+1}, \dots, x_n = b\}$
διαμέριση του $[a,b]$

Για κάθε $k = 0, 1, \dots n-1$, το συνολο $\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ είναι μη κενο, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
(γιατί η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ άρα και στο $[x_k, x_{k+1}]$)

Θέτουμε $M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ και
$m_k = \inf\{ \dots \}$

Το κάτω ορθογώνιο έχει εμβαδόν $m_k(x_{k+1} - x_k)$ και το άνω $M_k(x_{k+1} - x_k)$

Ορίζουμε: "το κάτω άθροισμα της f ως προς την P"

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)(x_{k+1}-x_k)$$

και

"το άνω άθροισμα της f ως προς την P"

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(f)(x_{k+1}-x_k)$$

Παρατήρηση: ~~…~~ $L(f,P) < U(f,P)$

Απόδειξη

$\forall\ k=0,1,\dots,n-1$ έχουμε

$m_k = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\} \le \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\} = M_k$

$\Rightarrow \forall k \quad m_k(x_{k+1}-x_k) \le M_k(x_{k+1}-x_k)$ γιατί $x_{k+1}-x_k > 0$

ΛΗΜΜΑ (βασικό)

Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Αν P, Q είναι δύο διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$ τότε

$$L(f,P) \le U(f,Q)$$

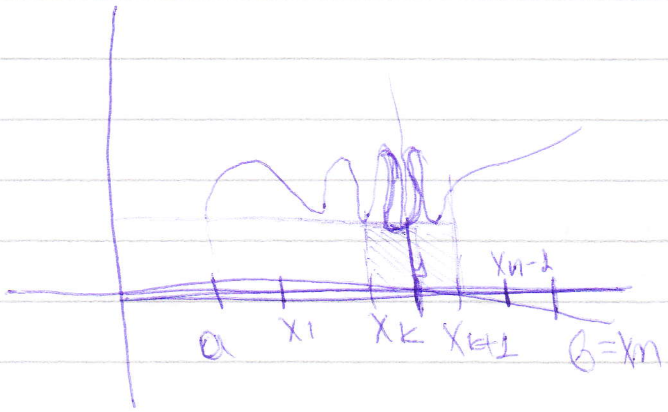
Απόδειξη: Θδο αν P, Q, T είναι διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$ και $P \subseteq T$ ~~και~~ τότε $L(f,P) \leq L(f,T)$ ενώ αν $Q \subseteq T$ τότε $U(f,Q) \geq U(f,T)$ (*)

Αν έχουμε την (*) και θεωρούμε τυχούσες P, Q την κοινή τους εκλέπτυνση $P \cup Q = T$. Από την (*) έχουμε:

$$\underset{P \subseteq P\cup Q}{L(f,P) \leq} L(f,P\cup Q) \underset{\text{Παρ } 0.}{\leq} U(f,P\cup Q) \underset{P\cup Q \supseteq Q}{\leq} U(f,Q)$$

Για την απόδειξη της (*) αρκεί νδο:

Ισχυρισμός: Αν $P = \{\alpha = x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots < x_n = \beta\}$ και $Q = P \cup \{y\} = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots x_k < y < x_{k+1} < \dots < x_n = \beta\}$ για κάποιο $y \in (x_k, x_{k+1})$ τότε $L(f,P) \leq L(f,Q)$ και $U(f,Q) \leq U(f,P)$



Από Ανάλ I

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u> (A, B φραγμ. $\subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq B$ τότε $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$)

Ορίζουμε $m' = \inf\{\underbrace{f(x) : x_k \le x \le y}_{A}\}$

$$m'' = \inf\{\underbrace{f(x) : y \le x \le x_{k+1}}_{\Gamma}\}$$

ισχύουν

$$m_k \le m' \quad \text{και} \quad m^k \le m''$$

όπου $m_k = \inf\{\underbrace{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}}_{B}\}$

Πράγματι, $A \subseteq B \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{m_k}}{\inf B} \le \underset{\overset{\shortparallel}{m'}}{\inf A}$

και $\Gamma \subseteq B \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{m_k}}{\inf B} \le \underset{\overset{\shortparallel}{m''}}{\inf \Gamma}$

Έχουμε $L(f,P) = \sum_{s=0}^{n-1} m_s(x_{s+1} - x_s) =$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} m_s(x_{s+1} - x_s) + m_k(x_{k+1} - x_k) + \sum_{s=k+1}^{n-1} m_s(x_{s+1} - x_s)$$

και

$$L(f,Q) = \sum_{s=0}^{n-1} m_s(x_{s+1}, x_s) + m'(y - x_k) + m''(x_{k+1} - y)$$

$$+ \sum_{s=k+1}^{n-1} m_s(x_{s+1} - x_s)$$

Άρα $L(f,Q) - L(f,P) = m'(y - x_k) + m''(x_{k+1} - y)$

$$- m_k(x_{k+1} - x_k) \ge m_k(y - x_k) + m_k(x_{k+1} - y) - m_k(x_{k+1} - x_k)$$

$$= m_k(\quad\quad) = 0$$

Συμπεράσματα

1) Αν $P \subseteq Q$ τότε $L(f,P) \leq L(f,Q)$ και
$U(f,P) \geq U(f,Q)$

*2) $\forall P, Q$ $\quad L(f,P) \leq U(f,Q)$

Ορισμός: Το κάτω ολοκλήρωμα της f είναι ο αριθμός

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \underset{\text{ορ}}{=} \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

(άνω φρ. από $M(b-a)$)

Το άνω ολοκλήρωμα της f είναι ο αριθμός

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \underset{\text{ορ}}{=} \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

(κάτω φρ. από $m(b-a)$)

Οι δύο αυτοί αριθμοί ορίζονται καλά:
Αν $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ και
$m = \inf\{ \quad \cdots \quad \}$ τότε για την

$P_0 = \{a < b\}$ έχουμε

$$L(f,P_0) = m(b-a) \quad \text{και} \quad U(f,P_0) = M(b-a)$$

Από το (*2): $\forall$ διαμέριση P, $L(f,P) \leq U(f,P_0) = M(b-a)$

$$\Longrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Όμοια $\forall$ διαμέριση P : $U(f,P) \geq L(f,P_0) = m(b-a)$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq m(b-a)$$

Επιπλέον $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ λόγω της άσκησης

"Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$
$\neq \emptyset$
και $\forall a \in A$ και $\forall b \in B$, $a \leq b$
τότε $\sup A \leq \inf B$ "

Απόδειξη: Στο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A
$(\Rightarrow \inf B \geq \sup A)$

Έστω $a \in A$ θέλω $a \leq \inf B$
Αρκεί να δείξω ότι ο a είναι κάτω φράγμα του B.
Γι' αυτό αρκεί $\forall b \in B$ $a \leq b$, το οποίο ισχύει

Ορισμός: Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Τότε γράφουμε $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

και αυτό είναι το ολοκλήρωμα της f.

Παραδείγματα

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < x_n = 1\}$ διαμέριση του $[0,1]$

$m_k = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\} = \inf\{0,1\} = 0.$

$M_k = \sup\{0,1\} = 1.$

(η f παίρνει τις τιμές $0,1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$ γιατί υπάρχει ρητός άρα και άρρητος στο $[x_k, x_{k+1}]$)

Άρα $L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = 0$

και $U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$

$= x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} =$

$= x_n - x_0 = 1 - 0 = 1.$

Τότε $\underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(f,P)}_{=0} : P \text{ διαμέριση του } [0,1]\} =$

$= \sup\{0\} = 0$

και $\overline{\int_0^1} f = \inf\{U(f,P) : P \text{ ''} \} = \inf\{1\} = 1$

$\overline{\int_0^1} f \neq \underline{\int_0^1} f$ άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.