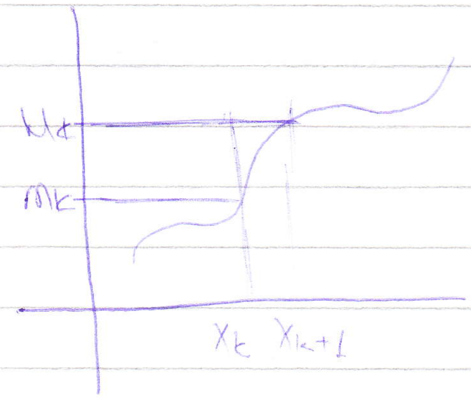
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη

$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<x_n=b\}$



Για $k=0,1,\dots,n-1$

$m_k=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$

$M_k=\sup\{\quad < \ < \quad\}$

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)$$

$$U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

<u>Πρόταση</u>: Αν P,Q είναι διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε
$L(f,P)\le L(f,P\cup Q)\le U(f,P\cup Q)\le U(f,Q)$

→ $\underline{\int_a^b} f=\sup\{L(f,P): P \text{ διαμέριση}\}$

→ $\overline{\int_a^b} f=\inf\{U(f,P): P \text{ διαμέριση}\}$

<u>Ισχύει</u> πάντα ότι $\underline{\int_a^b} f\le\overline{\int_a^b} f$. Αν είναι ίσα τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Κριτήριο του Riemann (I)</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P_ε ώστε:
$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$ (*)

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έχουμε $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ (ίσα γιατί f ολοκληρώσιμη)

Αφού $I = \sup_P L(f,P)$, υπάρχει P_1 διαμέριση του $[a,b]$:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1) \leq I \quad (1)$$

Αφού $I = \inf_P U(f,P)$, υπάρχει P_2 διαμέριση του $[a,b]$:

$$I \leq U(f,P_2) \leq I + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Θεωρούμε την $P = P_1 \cup P_2$ (κοινή εκλέπτυνση P_1, P_2)

τότε:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad U(f,P) - L(f,P) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρώ μια P_ε που ικανοποιεί την (*)

$$\overline{\int_a^b} f \leq U(f,P_\varepsilon) \underset{\text{από } (*)}{<} L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$ και αφού πάντα ισχύει η αντίστροφη ανισότητα, έχουμε ισότητα.

Κριτήριο Riemann (ΙΙ): Η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη $\iff$ υπάρχουν διαμερίσεις P_n, $n\in\mathbb{N}$ ώστε: $U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0$

Απόδειξη ($\Rightarrow$): Από το προηγούμενο, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ παίρνοντας $\varepsilon=\frac{1}{n}>0$ υπάρχει διαμέριση P_n:

$$0\le U(f,P_n)-L(f,P_n)<\frac{1}{n}\to 0$$

($\Leftarrow$): Έχουμε μια ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(**) $U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0$

Έστω $\varepsilon>0$. Λόγω της (*) για όλα τα μεγάλα τα n.

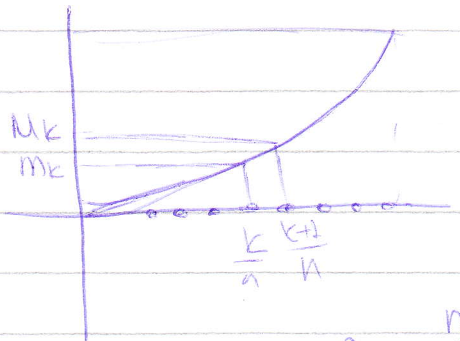
$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$

Δηλ. $\forall\,\varepsilon>0\ \exists P_\varepsilon$: $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon \underset{\text{κρ(Ι)}}{\Rightarrow} f$ ολ/μη.

Παραδείγματα:

β) Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι ολ/μη.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την $P_n=\left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}<\dots<1\right\}$



$$m_k=f(x_k)=x_k^2=\frac{k^2}{n^2}$$

$$M_k=f(x_{k+1})=\frac{(k+1)^2}{n^2}$$

Άρα $L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=$

$$=\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Όμοια, $U(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Riemann (II)

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \overset{\text{τηλεσκοπικό}}{=} \frac{1}{n^3}(n^2 - 0^2) = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ξέρω ότι $L(f,P_n) \le \int_0^1 f \le U(f,P_n) < L(f,P) + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 f - L(f,P_n) \right| < \frac{1}{n} \to 0$$

Υπολογίζουμε το $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)(n-1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Άρα $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$

Θεώρημα 1: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ μονότονη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 2: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη (ΘΕΩΡΗΜΑ 1)

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.
Η f είναι φραγμένη $\forall x \in [a, b]$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση

$$P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$$

όπου $x_k = x + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Διαιρούμε το $[a, b]$ σε n ίσα τμήματα μήκους $\frac{b-a}{n}$.

Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε

$$\underset{m_k}{\underset{\shortparallel}{f(x_k)}} \leq f(x) \leq \underset{M_k}{\underset{\shortparallel}{f(x_{k+1})}}$$

Τότε $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k) \right) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}) \right)$$

Δηλαδή $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \left(f(\overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}}) - f(\overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}) \right)$

$$= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \longrightarrow 0.$$

Απόδειξη (ΘΕΩΡΗΜΑ 2):

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε διαμέριση $P=P_\varepsilon$ του $[a,b]$ τ.ω

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, άρα είναι ομοιομόρφως συνεχής. Επομένως $\exists\, \delta>0$: αν $z,w\in[a,b]$ και $|z-w|<\delta$ τότε

$$|f(z)-f(w)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Υπάρχει $n\in\mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n}<\delta$

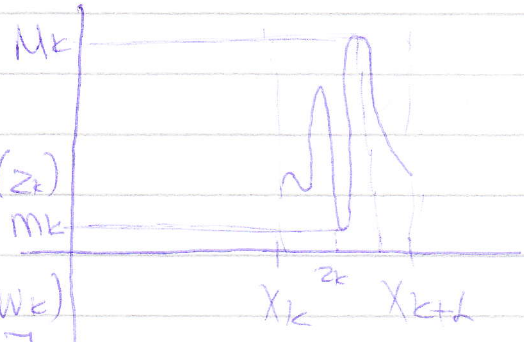
Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n ίσα διαδοχικά ευθύγρ. τμήματα.

$$P_n=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<x_n=b\}$$

όπου $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$, $k=0,1,\dots,n$.

Έχουμε $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)$$



όπου $m_k=\min\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=f(z_k)$

$M_k=\max\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}=f(w_k)$

για κάποια $z_k,w_k\in[x_k,x_{k+1}]$

Έχουμε: $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(w_k)-f(z_k))$

Παρατηρούμε ότι $\forall k$ $z_k,w_k\in[x_k,x_{k+1}]$

$$\Rightarrow |z_k-w_k|\le x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}<\delta$$

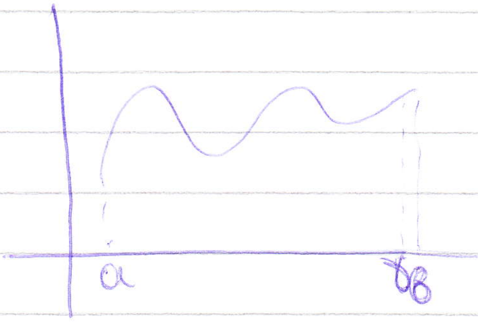
$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} |f(w_k)-f(z_k)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Πηγαίνοντας πίσω, έχουμε:

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Βασική Άσκηση (9):

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, φραγμένη με την εξής ιδιότητα $\forall\, \gamma \in (a,b)$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\gamma]$ τότε η f είναι ολ/μη στο $[\alpha,b]$



Έστω $\varepsilon > 0$

Θα βρούμε διαμέριση P του $[\alpha,b]$: $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Αφού η f είναι φραγμένη υπάρχει $A>0$:

$\forall\, x \in [\alpha,b] \quad |f(x)| \le A$

Επιλέγουμε $\gamma = \gamma(\varepsilon) \in (a,b)$: $b - \gamma < \frac{\varepsilon}{4A}$

Εφαρμόζω την υπόθεση γι' αυτό το γ: η f είναι ολ/μη στο $[\alpha,\gamma]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[\alpha,\gamma]$

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon/2$$

Ορίζουμε $P = Q \cup \{b\}$ Η P είναι διαμέριση του $[a,b]$ και $U(f,P) - L(f,P) = U(f,Q) - L(f,Q) + (M-m)(b-\gamma)$

όπου $M = \sup\{f(x),\ \gamma \le x \le b\} \le A$

και $m = \inf\{f(x),\ \gamma \le x \le b\} \ge -A$ $\Rightarrow M - m \le 2A$

Τελικά: $U(f,P)-L(f,P) = U(f,Q)-L(f,Q)+(M-m)(\beta-\gamma)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + 2A\frac{\varepsilon}{4A} = \varepsilon$