27/4

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 1: (γραμμικότητα) Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολ/μη και $t, s \in \mathbb{R}$ τότε η $tf + sg$ είναι ολ/μη και

$$\int_a^b (tf + sg) = t\int_a^b f + s\int_a^b g$$

Θεώρημα 2: (προσθετικότητα) Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $a < \gamma < b$, τότε η f είναι ολ/μη στο $[\alpha, \beta]$ $\iff$ η f είναι ολ/μη στα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ και τότε

$$\int_a^b f = \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f$$

Συνέπειες: (1) Αν $m \leq f(x) \leq M$ και η f ολ/μη τότε $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

(2) Αν $f \geq 0 \leadsto \int_a^b f \geq 0$

(3) Αν $f \geq g \leadsto \int_a^b f \geq \int_a^b g$

Θεώρημα 3: Έστω $f : [a, b] \to [m, M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτ. Τότε η $\phi \circ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Εφαρμογές

(4) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολ/μη τότε η $|f|$ είναι ολ/μη.

Απόδειξη

Η $\phi(x)=|x|$ είναι συνεχής και

$$|f(x)| = \varphi(f(x)) = (\underbrace{\phi}_{\text{συνεχής}} \circ \underbrace{f}_{\text{ολ/μη}})(x)$$

Επίσης: $-|f| \le f \le |f|$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} -\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|}$$

(5) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολ/μη τότε η f^2 είναι ολ/μη.

Απόδειξη Η $\varphi(z)=z^2$ είναι συνεχής και

$$f^2(x) = (f(x))^2 = \phi(f(x)) = (\underbrace{\phi}_{\text{συνεχής}} \circ \underbrace{f}_{\text{ολ/μη}})(x)$$

Σημείωση: Όμοιως οι f^k $(k\in\mathbb{N})$, $|f|^p$ $(p>0)$, e^f είναι ολ/μες αν η f είναι ολ/μη

(6) Αν οι f, g στο $[\alpha, b]$ είναι ολ/μες τότε η $f \cdot g$ είναι ολ/μη

~~στο~~

Απόδειξη:

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

Όμως οι f, g είναι ολ/μες

$\xrightarrow{\text{γρ}}$ $f+g$, $f-g$, ολ/μες

$\xrightarrow{(5)}$ $(f+g)^2$, $(f-g)^2$ ολ/μες

$\xrightarrow{\text{γρ}}$ $\underbrace{\frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2}_{f \cdot g}$ ολ/μη

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Δεν ισχύει γενικά:

$$\int_a^b f \cdot g = \int_a^b f \cdot \int_a^b g$$

Απόδειξη (Θεώρημα 3) (εκτός ύλης)

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[\alpha, b]$:

$$U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) < \varepsilon$$

(1) Η ϕ είναι φραγμένη (ως ~~ολ/μη~~ συνεχής). Υπάρχει $A > 0$:

$\forall x \in [\alpha, b]$ $|f(x)| \le A$.

(2) Η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[m, M]$

~~[illegible]~~ άρα υπάρχει $\delta > 0$:

αν $z, w \in [m, M]$ και $|z - w| < \delta$ τότε

$$|\phi(z) - \phi(w)| < \frac{\varepsilon}{2A + b - \alpha}$$

Η f είναι ολ/λιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει διαμέριση
$$P=\{\alpha=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$$
για την οποία:
$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)<\delta^2$$
Ορίζουμε $J=\{0\leq k\leq n-1 : M_k(f)-m_k(f)<\delta\}$

και $I=\{k : M_k(f)-m_k(f)\geq\delta\}$

Παρατηρούμε ότι:
$$\delta^2>\sum_{k=0}^{n-1}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)\geq\sum_{k\in I}\underbrace{(M_k(f)-m_k(f))}_{\geq\delta}(x_{k+1}-x_k)$$
$$=\delta\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k)\Longrightarrow\boxed{\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k)<\delta}\ (*)$$

(α) Έστω $k\in I$ τότε $M_k(\phi\circ f)=\sup\{\phi(f(x)) : x_k\leq x\leq x_{k+1}\}$
$$\leq A$$
$$m_k(\phi\circ f)=\inf\{\phi(f(x)) : x_k\leq x\leq x_{k+1}\}\geq -A$$

Άρα $\sum_{k\in I} M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f)(x_{k+1}-x_k)\leq 2A\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k)\underset{(*)}{<}2A\delta$

(β) Έστω $k\in J$

Για κάθε $x,y\in[x_k,x_{k+1}]$ έχουμε
$m_k(f)\leq f(x),f(y)\leq M_k(f)\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq M_k(f)-m_k(f)$
$<\delta$ γιατί $k\in J$

Μπορώ να υποθέσω ότι
$$\delta<\frac{\varepsilon}{2A+b-a}$$

Από το (2) $\forall\, x,y \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|\phi(f(x))| - \phi(f(y))| < \frac{\varepsilon}{2A+b-a}$$

$$\xRightarrow{\forall x,y\in[x_k,x_{k+1}]} (\phi\circ f)(x) < (\phi\circ f)(y) + \frac{\varepsilon}{2A+b-a}$$

$$\Longrightarrow M_k(\phi\circ f) \le m_k(\phi\circ f) + \frac{\varepsilon}{2A+b-a}$$

Άρα $\displaystyle\sum_{k\in J}(M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \le$

$$\le \frac{\varepsilon}{2A+b-a}\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k) \le \frac{\varepsilon}{2A+b-a}(b-a)$$

Τότε

$$U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k)$$

$$= \sum_{k\in J}\cdots + \sum_{k\in I}\cdots \le \frac{\varepsilon}{2A+b-a}(b-a) + 2A\delta$$

$$< \frac{\varepsilon(b-a)}{2A+b-a} + 2A\cdot\frac{\varepsilon}{2A+b-a} = \varepsilon$$

Ασκήσεις

(14) → $\boxed{SOS}$

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$

Δείξτε ότι

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = 0 \iff f\equiv 0$$

($\Longleftarrow$): Αν $f(x)=0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)dx = 0\,(\beta-a)=0$$

($\Longrightarrow$) Έστω ότι υπάρχει κάποιο $y\in[a,\beta]: f(y)>0$.

Τότε υπάρχει περιοχή του y στην οποία όλες οι τιμές είναι >0.

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a<y<\beta$

Παίρνουμε $\varepsilon=\dfrac{f(y)}{2}>0$

Αφού η f είναι συνεχής στο y, μπορούμε να βρούμε $\delta>0$

(1) $a<y-\delta<y<y+\delta<\beta$

(2) $\forall x\in(y-\delta,y+\delta)$

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon=\frac{f(y)}{2} \Rightarrow \frac{f(y)}{2}<f(x)<\frac{3f(y)}{2}$$

Έχουμε $$\int_a^\beta f(x)dx = \underbrace{\int_a^{y-\delta} f(x)dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{y-\delta}^{y+\delta} f(x)dx}_{\geq \frac{f(y)}{2}} + \underbrace{\int_{y+\delta}^{\beta} f(x)dx}_{\geq 0} \geq$$

$\geq 0\cdot(y-\delta-\alpha) + \frac{f(y)}{2}\left(y+\delta-(y-\delta)\right) + 0\cdot\left(\beta-(y+\delta)\right)$

$= \frac{f(y)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\delta = \delta\cdot(f(y)) > 0$, άτοπο

(15) $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς και

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$, τότε υπάρχει

$x_0\in[\alpha,\beta]$: $f(x_0)=g(x_0)$.

Θεωρούμε την $h(x)=g(x)-f(x)$

Αν $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $f(x)\neq g(x)$ τότε $\forall x\in[\alpha,\beta]$

$h(x)\neq 0$ και αφού η h είναι συνεχής

έχουμε (από ΘΕΤ)

$h(x)>0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ ή $-h(x)>0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Όμως $\int_\alpha^\beta h(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \overset{\text{υπόθ}}{=} 0$

· Αν $h>0$ παντού και $\int h=0$ έχουμε άτοπο

από Άσκ. 14 $(h\equiv 0)$

· Αν $-h>0$ παντού και $\int(-h)=-\int h=0$ « $(-h\equiv 0)$

~~· Αν $-h>0$ παντού και $\int(-h)=$~~

(16) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με την εξής ιδιότητα:

$\forall$ συνεχή $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$

Τότε, $f\equiv 0$.

Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $g=f$ (συνεχής) έχουμε $\int_a^b (f(x))^2 dx = \int_a^b f(x)\cdot \underset{g}{f(x)}\, dx \overset{\text{υπο}}{=} 0$.

Η f^2 είναι μη αρνητική και συνεχής.

Αφού $\int_a^b f^2=0$, από την άσκ 14,

$$f^2\equiv 0$$

δηλ. $\forall\, x\in[a,b]$ $\quad f^2(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

(17) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με την εξής ιδιότητα: $\forall$ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με

$g(a)=g(b)=0$ ισχύει ότι:

$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=0$. Τότε, $f\equiv 0$.

Θεωρούμε την $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=(x-a)(b-x)\cdot f(x)$

Η g είναι συνεχής γιατί η f είναι συνεχής και $g(a)=g(b)=0$.

Από την υπόθεση $\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b \underbrace{f^2(x)(x-a)(b-x)}_{\geq 0 \text{ και συνεχής}}dx=0$

Από ασκ 14 $\quad f^2(x)(x-a)(b-a)=0 \quad \forall\ x\in[a,b]$

Αν $x\in(a,b)$ τότε $(x-a)(b-x)\neq 0$

άρα $f^2(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$

Αφού η f είναι συνεχής στο a και b παίρνουμε:

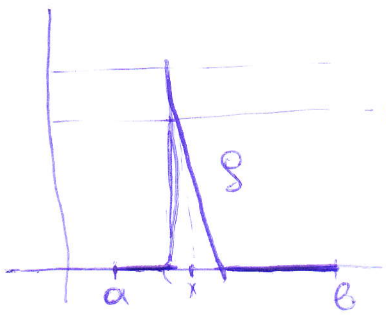
$$f(a)=\lim_{x\to a^+}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x)}}=0$$

και

$$f(b)=\lim_{x\to b^-}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x)}}=0$$

Άρα $f(x)=0 \quad \forall\ x\in[a,b]$.

(Αλλιώς, υποθέτουμε ότι $\exists\, x\in[a,b]$: $f(x)>0$



$g(a)=g(b)=0$)

(18) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολλικές συναρτήσεις.

Αποδείξτε ότι $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$

(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Ας υποθέσουμε ότι $\int f^2=\int g^2=1$

Τότε $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \int_a^b \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx$ $\quad$ (αφού $|xy|\leq \frac{x^2+y^2}{2}$)

$$= \frac{1}{2}\int_a^\beta f^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^\beta g^2(x)\,dx$$

$$\overset{\text{υποθ}}{=} \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^\beta |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 \le 1 = \left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right)$$

Στην γενική περίπτωση θεωρούμε τους:

$$f_1 = \frac{f}{\underbrace{\sqrt{\int f^2}}_{\gamma}}, \quad g_1 = \frac{g}{\underbrace{\sqrt{\int g^2}}_{\delta}}$$

Τότε $\int f_1^2 = \int \frac{f^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}\int f^2 = 1$

$$\int g_1^2 = \int \frac{g^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}\cdot\int g^2 = 1$$

Από την ειδική περίπτωση (για f_1, g_1) έχουμε:

$$\int_a^\beta |f_1\cdot g_1| \le 1 \Rightarrow \int_a^\beta \frac{|f\cdot g|}{\gamma\delta}\,dx \le 1 \Rightarrow$$

$$\int_a^\beta |f\cdot g| \le \gamma\delta = \sqrt{\int f^2}\cdot\sqrt{\int g^2}$$