29/4

Άσκηση 18 (ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Έστω $f, g : [a, b]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Τότε:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

Ξέρουμε ότι οι $f \cdot g$, f^2, g^2 είναι ολ/μες

Επίσης, $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx\right)^2 \overset{;}{\le} \underbrace{\left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right)}_{=\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)}$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολ/μες και $f \ge 0$, $g \ge 0$

Ειδική περίπτωση: Υποθέτουμε επιπλέον ότι:

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 1$$

Τότε χρησιμοποιώντας την $\gamma\delta \le \frac{\gamma^2+\delta^2}{2}$ γράφουμε

$$0 \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^b f^2(x)\,dx}_{=1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^b g^2(x)\,dx}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \sqrt{\int_a^b f^2}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2}$$

$$\Longrightarrow \left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

<u>Κανονικοποίηση</u>: Παίρνουμε γενικές $f, g \ge 0$, αλλιώς

Υποθέτουμε ότι $\int_a^b f^2 > 0$, $\int_a^b g^2 > 0$

Υπάρχουν $\lambda, \mu > 0$: $\int_a^b \left(\frac{f}{\lambda}\right)^2 = 1$ και $\int_a^b \left(\frac{g}{\mu}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{f^2}{\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow \int_a^b f^2 = \lambda^2 \qquad \Leftrightarrow \mu = \sqrt{\int_a^b g^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

Θεωρούμε τις $f_1 = \frac{f}{\lambda}$, $g_1 = \frac{g}{\mu}$

Από τον τρόπο επιλογής του λ και του μ

έχουμε:
$$\int_a^b f_1^2 = \int_a^b g_1^2 = 1$$

Επίσης $f_1, g_1 \geq 0$

Από την ειδική περίπτωση

$$\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{\lambda\mu}dx = \int_a^b f_1(x)g_1(x)dx \leq 1$$

$$\| $$

$$\frac{1}{\lambda\mu}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Άρα, $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \lambda\mu = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$.

• Αν $\int_a^b f^2 = 0$ ή $\int_a^b g^2 = 0$, θέτουμε:
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Αν είχαμε ότι f, g συνεχείς, από την $\int f^2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow \int fg = 0$

Δευτερη απόδειξη

Θεωρούμε το τριώνυμο το ολοκλήρωμα είναι ≥ 0.

$$0 \leq P(t) = \int_a^b \underbrace{\big(tf(x) + g(x)\big)^2}_{\geq 0} dx \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$= \int_a^b \{t^2 f^2(x) + 2t f(x) g(x) + g^2(x)\} dx$$

$$= t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

$$= At^2 + 2Bt + \Gamma \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} A = \int f^2 \\ B = \int fg \\ \Gamma = \int g^2 \end{cases}$$

Αφού $P(t) = At^2 + 2Bt + \Gamma \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

η διακρίνουσα $\Delta = 4B^2 - 4A\Gamma \leq 0$

$$\Rightarrow B^2 \leq A\Gamma \Rightarrow \left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

(19) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολ/μη. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Τέχνασμα: $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\cdot \underset{g(x)}{\underset{\shortparallel}{1}}\,dx\right)^2 \leq$

$$\underset{C-S}{\leq} \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)\underbrace{\left(\int_0^1 1^2\,dx\right)}_{1}$$

Για γενικό διάστημα $[a,b]$:

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)\cdot 1\,dx\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\underbrace{\left(\int_a^b 1^2\,dx\right)}_{b-a}$$

Δηλαδή: $\left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2$

Ο <u>ορισμός</u> του <u>Riemann</u> για το <u>ολοκλήρωμα</u>:

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη

Θεωρούμε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

και τυχούσα επιλογή

$$\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\} \quad \text{με}$$

$$\xi_k\in[x_k,x_{k+1}],\ k=0,1,\dots,n-1$$

Για κάθε P και Ξ (επιλογή για την P)

ορίζουμε:

$$\Sigma(f,P,\Xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

Λέμε ότι η f είναι "Ξ-ολ/μη" αν υπάρχει $I\in\mathbb{R}$:

$$\text{"}\lim_{\|P\|\to 0}\Sigma(f,P,\Xi)=I\text{"}$$

πλάτος διαμέρισης

"$\forall\,\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα:

για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ που έχει

~~πλάτος~~ πλάτος $\|P\|=\max(x_{k+1}-x_k)<\delta$

και για κάθε επιλογή Ξ με $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$

$$|I-\Sigma(f,P,\Xi)|<\varepsilon\text{"}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη

Τότε η f είναι ολ/μη $\Leftrightarrow$ η f είναι Ξ-ολ/μεν
(Darboux) (Riemann)

(και βέβαια η τιμή του ολοκληρώματος είναι η ίδια)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολ/μη.

Θεωρούμε την $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ και την επιλογή

$$\Xi_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Έχουμε $\|P_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0$

Από την ισοδυναμία των δύο ορισμών

$$\Sigma(f, P_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{(x_{k+1} - x_k)}$$

Απλ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$

21) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, ολ/μη. Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx$

Θεωρούμε την διαμέριση $P_n = \left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}<\dots<1\right\}$

και την επιλογή σημείων $\Xi_n = \left\{\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n}\right\}$

$$\frac{1}{n} \in \left[0,\frac{1}{n}\right],\quad \frac{2}{n} \in \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\quad \frac{n}{n} \in \left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right]$$

Αφού $\|P_n\| = \frac{1}{n} \to 0$

Έχουμε $\Sigma(f, P_n, \Xi_n) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$

$$\Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{\text{ορ}}{=} a_n$$

(22) Δείξτε ότι $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$

Ξέρουμε (από άσκ 21) ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=\sqrt{\frac{k}{n}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

Υπολογισμός του $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ με αυτά που ξέρουμε:

Θεωρούμε την διαμέριση $P=\left\{0,\left(\frac{1}{n}\right)^2<\left(\frac{2}{n}\right)^2<\dots<\left(\frac{k}{n}\right)^2<\left(\frac{k+1}{n}\right)^2<\dots<1\right\}$

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) =$$

$$f(x_k)=\sqrt{x_k}=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{k}{n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{(k+1)^2-k^2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(2k+1)}{n^3}$$

$$=\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k =$$

$$=\frac{2}{n^3}\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6}+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2} \to \frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Ομοίως, $U(f,P_n) \to \frac{2}{3}$ (υπολογισμοί)

Ξέρουμε ότι η $\sqrt{x}$ είναι ολ/μη και ότι

$$\underbrace{L(f,P_n)}_{\downarrow \frac{2}{3}} \leq \int_0^1 \sqrt{x}\,dx \leq \underbrace{U(f,P_n)}_{\downarrow 2/3} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$$

Συμπλήρωμα: Αν $f,g:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολ/μες και $\int_\alpha^\beta f^2 = 0$ τότε $\int_a^\beta fg = 0$

Για κάθε n έχουμε:

$$\left| \int_a^\beta \frac{fg}{n} \right| \leq \int_a^\beta |f| \cdot \frac{|g|}{n} \leq \frac{1}{2}\cancel{\int_a^\beta f^2} + \frac{1}{2}\int_a^\beta \frac{g^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^\beta fg \right| \leq \frac{n}{2n^2} \int_a^\beta g^2$$

Άρα $\left| \int_a^\beta fg \right| \leq \frac{1}{2n} \int_a^\beta g^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \left| \int_a^\beta fg \right| = 0 \Rightarrow \int_a^\beta fg = 0$$

(24) Δείξτε ότι η $f_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Θα δείξουμε ότι η (f_n) είναι μονότονη και φραγμένη.

Μονοτονία: $f_{n+1} - f_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq 0, \text{ αφού:}$$

Έχουμε $n \leq x \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall\, x \in [n, n+1]$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \geq \frac{1}{n+1}(n+1-n) = \frac{1}{n}$$

Άρα η (f_n) είναι φθίνουσα.
Θα δείξουμε ότι είναι κάτω φραγμένη.

Αν $k \le x \le k+1$ τότε $\frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$$

Γράφουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le 1 \\ &\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{2} \\ &\quad\vdots \\ &\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{n-1} \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$\le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Άρα $f_n > 0$.