22/5

Βασικά αναπτύγματα σε δυναμοσειρές

1) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$

3) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$

4) $\ln(1+x), \quad x > -1$

• Υπολογίζω το $T_{n,f,0}(x)$

$f(x) = \ln(1+x)$ $\quad\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $\quad\quad f''(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad\quad f^{(3)}(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = -\frac{3}{(1+x)^4}$ $\quad\quad f^{(4)}(0) = -3!$

⋮

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ $\quad\quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Ψάχνουμε τις τιμές του $x$ για τις οποίες

$$T_{n,f,0}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) = \ln(1+x)$$

$\parallel$

τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Θεωρούμε το $f(x) - T_{n,f,0}(x) = R_{n,f,0}(x) =$

$$= \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt$$

Μπορώ να δείξω ότι το ολ|μα$_n$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

αν $|x|<1$.

<u>Άλλος τρόπος</u>:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} \, dt \quad , \ \forall \ x > -1$$

Ξέρω ότι, αν $|t|<1$ τότε

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot t^k$$

Αν μπορούσα να γράψω $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \underset{|x|<1}{=} \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k\Big) dt$

$$\overset{??}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^k \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Γράφουμε $\displaystyle \frac{1}{1+t} = \underbrace{1 + (-t) + \dots + (t)^n}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}} + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \, dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^k \, dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

Άρα $\forall x > -1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

Φράσουμε το ~~[illegible]~~ $\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1} dt \right|$

α) $x>0$. Έχουμε το $\int_0^x \frac{t^{n+1}}{\underbrace{1+t}_{\geq 1}} dt \leq \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+2}}{n+2} \to 0$

β) $-1<x<0$

Έχουμε το $\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \right| = \left| - \int_x^0 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^{n+1}}{1+t} dt$

$$\leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 \underbrace{|t|^{n+1}}_{\leq |x|^{n+1}} dt \leq \frac{|x|^{n+1}(-x)}{1+x} = \frac{|x|^{n+2}}{1+x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

γιατί $|x|<1$

Άρα $\forall$ $-1<x\leq 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Σημείωση: Για $x=1$

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 1^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5) $\arctan x$

Γράφουμε $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \underbrace{1+(-t^2)+(-t^2)^2+\dots+(-t^2)^n}_{\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Άρα $\arctan x = \int_0^x 1\,dt + \int_0^x (-t^2)\,dt + \dots + \int_0^x (-t^2)\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

Το υπόλοιπο είναι: $\left|\cancel{(-1)^{n+1}}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right|$

$x>0$:

$$\le \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \to 0$$

αν $x \le 1$

$x<0$:

$$\le \int_x^0 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \left.\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right|_x^0 = -\frac{x^{2n+3}}{2n+3} =$$

$$= \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \longrightarrow 0$$

αν $|x| \le 1$

Άρα $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots$

για $-1 \le x \le 1$

<u>Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών</u>

· <u>Δυναμοσειρά</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$

· <u>Ακτίνα σύγκλισης</u>: Αν $\alpha = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$ τότε η ακτίνα σύγκλισης της

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ είναι } R = \frac{1}{a} = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

<u>Ορισμός</u>: Λέμε ότι μια συνάρτηση $f:(-R,R) \to \mathbb{R}$ αναπαρίσταται από δυναμοσειρά αν υπάρχουν $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\forall x \in (-R,R) \quad f(x) = \sum_{k=0} \alpha_k x^k$$

πχ: Η $f(x) = e^x$ αναπαρίσταται από την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ στο $(-\infty, +\infty)$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω ότι $f:(-R,R) \to \mathbb{R}$ και ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, $-R < x < R$.

α) Τότε για κάθε $x \in (-R,R)$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) \alpha_n x^{n-k}$$

Δηλαδή η $f$ είναι άπειρες φορές παρ/μη στο $(-R,R)$

Επίσης $f^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad \forall k$.

β) $\forall x \in (-R, R) \quad \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Απόδειξη:

α) Δείχνουμε τον ισχυρισμό για την πρώτη παράγωγο.

Έστω $x \in (-R, R)$. $\exists \delta > 0 : |x| + \delta < R$

Αφού ~~$|x|+\delta$~~

$-R < 0 < |x| + \delta < R$ ξέρουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x|+\delta)^n < +\infty$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t = 0} \left[ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \right] = 0$$

Αν $0 < |t| < \delta$ τότε $|x+t| \le |x| + |t| < |x| + \delta < R$

άρα $x + t \in (-R, R) \Rightarrow$ η $f(x+t)$ ορίζεται καλά και είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+t)^n$$

Έχουμε: για $n \geq 1$

$$\frac{a_n(x+t)^n - a_n x^n}{t} - n \cdot a_n x^{n-1} =$$

$$a_n \frac{(x+t)^n - x^n - n x^{n-1} t}{t} = \frac{a_n}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k - x^n - n x^{n-1} t\right)$$

$$= \frac{a_n}{t}\left(\cancel{x^n} + \cancel{n x^{n-1} t} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k - \cancel{x^n} - \cancel{n x^{n-1} t}\right)$$

$$= \frac{a_n}{t} t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2}$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{a_n(x+t)^n - a_n x^n}{t} - n x^{n-1} t \right| \leq |a_n| \cdot |t| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |t|^{k-2}$$

$$\leq |a_n| \cdot |t| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^{k-2} \leq$$

$$\leq \frac{|a_n| \cdot |t|}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k = \frac{|a_n| \cdot |t|}{\delta^2} (|x| + \delta)^n .$$

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \cdot t \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n(x+t)^n - a_n x^n}{t} - n a_n x^{n-1} \cdot t \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{a_n(x+t)^n - a_n x^n}{t} - n \cdot a_n x^{n-1} \cdot t \right|$$

$$\leq \frac{|t|}{\delta^2} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|x|+\delta)^n}_{M<\infty} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Τώρα η $g(x) = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

$$\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Από το προηγούμενο βήμα η $g$ είναι παρ/μη και

$$f''(x) = g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τις ~~$f^{(k)}(x)$~~

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n x^{n-k} \quad \forall \ k \geq 1.$$

Για $x=0$ έχουμε $f^{(k)}(0) = k(k-1) \cdots (k-k+1)\, a_k$
$= k!\, a_k$.

β) Η $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ικανοποιεί το β' θεμελιώδες θεώρημα

(η f είναι συν/ση στο $(0,x)$ αν $|x|<R$ γιατί είναι άπειρες φορές παρ/ιμη)

~~[illegible]~~

Θεωρώ την $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

(Έχει διάστημα σύγκλισης το $(-R,R)$ διότι $\limsup\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}=$ $=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$ )

από το (α) $G'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)'=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)=F'(x)$

Άρα $F(x)=G(x)+C$ στο $(-R,R)$

όμως $0=F(0)=G(0)+C=0+C\Rightarrow C=0$.