29/5

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$\int R(x)dx$ όπου $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q πολυώνυμα

υπολογίζεται πάντα με συγκεκριμένη μέθοδο

ρητή συνάρτηση

Βήμα 1:
Αν $\deg(p) \geq \deg(q)$ τότε $\exists\ \pi(x), u(x)$ με $\deg(u) < \deg(q)$ ώστε

$$p(x) = \pi(x)\cdot q(x) + u(x)$$

$$\Rightarrow \int R(x)dx = \int \frac{\pi(x)\cdot q(x) + u(x)}{q(x)}dx = \int \pi(x)dx + \int \frac{u(x)}{q(x)}dx$$

Υποθέτουμε ότι: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ και $\deg(p) < \deg(q)$

και μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$q(x) = x^m + b_{n-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad , (n<m)$$

Βήμα 2: Αναλύουμε το ~~$q(x) = (x-a_i)$~~

$$q(x) = (x-a_1)^{t_1}\dots(x-a_r)^{t_r}\cdot(x^2+b_1x+\gamma_1)^{l_1}\dots(x^2+b_sx+\gamma_s)^{l_s}$$

όπου $\forall\ j=1,\dots,s$ το $x^2+b_jx+\gamma_j$ έχει αρνητική διακρίνουσα (δηλαδή δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $z_j, \bar{z}_j$)
και $m = t_1+\dots+t_r + 2l_1+\dots+2l_s$

Άρα έχουμε

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a_1)^{t_1}\dots(x-a_r)^{t_r}(x^2+b_1x+\gamma_1)^{l_1}\dots(x^2+b_sx+\gamma_s)^{l_s}}$$

Βημα 3: (Αποδεικνύεται ότι) υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $A_{11}, \dots A_{1t_1}$

$\vdots$

$A_{rt_1} \dots A_{rt_r}$

$B_{11}, \Gamma_{11}, \dots, B_{1l_1}, \Gamma_{1l_1}$

$B_{s1}, \Gamma_{s1}, \dots, B_{sl_s}, \Gamma_{sl_s}$

ώστε

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1t_1}}{(x-a_1)^{t_1}}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{A_{r1}}{x-a_r} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots + \frac{A_{rt_r}}{(x-a_r)^{t_r}}$$

$$+ \frac{B_{11}x + \Gamma_{11}}{x^2+b_1x+\gamma_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + \Gamma_{1l_1}}{(x^2+b_1x+\gamma_1)^{l_1}}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{B_{s1}x + \Gamma_{s1}}{x^2+b_sx+\gamma_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + \Gamma_{sl_s}}{(x^2+b_sx+\gamma_sx)^{l_s}}$$

<u>Βημα 4:</u> Όλα τα ολοκληρώματα που προκύπτουν αν πάω να υπολογίσω το

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$ δηλαδή τα

$$\int \frac{dx}{(x-a)^t}\ ,\quad \int \frac{dx}{x-a}\ ,\quad \int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^\ell}\,dx$$ υπολογίζονται

όπου $\beta^2-4\gamma<0$

<u>Παραδείγματα</u>

α) $$\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

• $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$

• $$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+2}$$ (υπάρχουν α,β,γ ώστε να ισχύει αυτό)

Θέλω $$\frac{3x^2+6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{\alpha(x^2+x-2)+\beta(x^2+2x)+\gamma(x^2-x)}{x(x-1)(x+2)}$$

$\Rightarrow 3x^2+6 = (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha+2\beta-\gamma)x - 2a$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a+\beta+\gamma=3 \\ \alpha+2\beta-\gamma=0 \\ -2a=6 \end{array} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} \beta+\gamma=6 \\ 2\beta-\gamma=3 \\ \alpha=-3 \end{array} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} \beta=3 \\ \gamma=3 \\ a=-3 \end{array}$$

Άρα

$$\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x} = -3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + c$$

Πρόταση: Το $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}dx$ "υπολογίζεται".

- Το $\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}dx$ υπολογίζεται

(Θέτω $y = x^2+\beta x+\gamma \rightarrow (2x+\beta)dx = dy$
και έχω να υπολογίσω
το $\int \frac{dy}{y^m}$)

- Γράφουμε $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+\beta) + \left(\Gamma - \frac{B\beta}{2}\right)$

$$\Rightarrow \int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}dx$$

$$+\left(\Gamma - \frac{B\beta}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}$$

• Το $\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}$ υπολογίζεται: γράφουμε

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)$$

$$=\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}\right)^2+1\right]$$

Άρα

$$\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^m} = \frac{1}{\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)^m}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}\right)^2+1\right]^m} =$$

$$= \frac{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}{\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)^m}\int\frac{dy}{(y^2+1)^m}$$

αυτό ξέρουμε να το υπολογίζουμε αναδρομικά (Ασκ 4)

Παράδειγμα:

$$\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$$

- $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1)$
$= (x-1)(x^4+2x^2+1) = (x-1)(x^2+1)^2$

- Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1} + \frac{\delta x+\varepsilon}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\alpha(x^2+1)^2+(\beta x+\gamma)(x^2+1)(x-1)+(\delta x+\varepsilon)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\alpha x^4+2\alpha x^2+\alpha+\beta x^4-\beta x^3+\beta x^2-\beta x+\gamma x^3-\gamma x^2+\gamma x-\gamma+\delta x^2-\delta x+\varepsilon x-\varepsilon}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha+\beta=0\\ &-\beta+\gamma=0\\ &2\alpha+\beta-\gamma+\delta=0\\ &-\beta+\gamma+\varepsilon-\delta=1\\ &\alpha-\varepsilon-\gamma=1 \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &\alpha=\frac{1}{2}\\ &\beta=-\frac{1}{2}\\ &\gamma=-\frac{1}{2}\\ &\delta=-1\\ &\varepsilon=0 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε το:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Για το τελευταίο:

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\int(x)'\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{2(x^2+1-1)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{(x^2+1)}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+c.$$

Ασκήσεις

(υπολογίστε τα ολοκληρώματα)

2) • $\int \frac{dx}{x^4+1}$

• $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$

$= (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$

(έχουν αρνητική διακρίνουσα)

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$ •

• $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ Θέτουμε $u=\sqrt[6]{x}$

$\sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=u^3$

$\sqrt[3]{x}=(\sqrt[6]{x})^2=u^2$

και $x=u^6 \Rightarrow dx=6u^5du$

Υπολογίζουμε το:

$$\int\frac{6u^5\,du}{u^3+u^2} = \int\frac{6u^{\cancel{5}3}}{\cancel{u^2}(u+1)}du$$

$$=6\int\frac{u^3+1}{u+1}du-6\int\frac{du}{u+1} = 6\int(u^2-u+1)-6\ln|u+$$

$$=6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u\right)-6\ln|u+1|+C$$ (όπου u βάζω $\sqrt[6]{x}$

$\bullet \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. Θέτουμε $y=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow y^2=1+e^x$

$$dy = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\,dx \qquad \Rightarrow e^x = -1+y^2$$

$$= \frac{y^2-1}{2y}\,dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2y}{y^2-1}\,dy$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \overset{y=\sqrt{1+e^x}}{=\!=\!=} \int \frac{2y}{y^2-1}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{(y-1)(y+1)}\,dy$$

$$= \int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \ln|y-1|-\ln|y+1|+c$$

όπου $y=\sqrt{1+e^x}$

③ $\displaystyle\int \cos^2x\cdot\sin^3x\,dx = \int \cos^2x\cdot\sin^2x\cdot\sin x\,dx$

$$\underset{\substack{\sin^2x=1-y^2\\ dy=-\sin x\,dx}}{\overset{y=\cos x}{=\!=\!=}} -\int y^2(1-y^2)\,dy = -\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+c$$

όπου $y=\cos x$

$$\bullet \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (\tan x)' \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \tan x \frac{\sin x}{\cancel{\cos^4 x}\ \cos^3 x}\,dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin^2 x \xrightarrow{} 1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^4 x} + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 3\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\tan x}{3\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{3} + c$$

$\boxed{3|6}$

Ειδικές αντικαταστάσεις

1) $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

R = ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών: $R(t,s) = \frac{P(t,s)}{Q(t,s)}$
και $R(\cos x, \sin x)$ είναι η συνάρτηση
που προκύπτει αν θέσουμε $t = \cos x$ και $s = \sin x$
πχ:

$$R(t,s) = \frac{t^3 s - 2ts^2 + s^3}{s^2 t - s t^5}$$

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{\cos^3 x \cdot \sin x - 2\cos x \sin^2 x + \sin^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^5 x}$$