5|6

Επαναληπτικές Ασκήσεις

(2005). Εξετάστε αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$

Θεωρούμε την $b_n=\frac{1}{n^3}$

Έχουμε $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{6}$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

και $\frac{1}{n}\to 0^+$ απο αρχή μεταφοράς

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ δηλαδή συγκλίνει

(2005) Δείξτε οτι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(x)=1+\int_0^x g(t)\,dt\ ,\quad x\in\mathbb{R}\quad (*)$$

Να βρεθεί η g.

Παραγωγίζοντας την $(*)$ $g'(x)=g(x)$ Μια τέτοια g είναι η e^x

Έστω g μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την $(*)$

Θεωρούμε την $f(x)=g(x)\cdot e^{-x}$

$$f'(x)=g'(x)\cdot e^{-x}-g(x)\cdot e^{-x}$$
$$\overset{(*)}{=}g(x)\cdot e^{-x}-g(x)\cdot e^{-x}=0$$

Άρα η f είναι σταθερή, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$:

$f(x)=c \Rightarrow g(x)=c\cdot e^x\ ,\ x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον $g(0)=1+\int_0^0 g(t)\,dt=1$

$=c\cdot e^0\Rightarrow c=1$

(2005) • $\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx =$

$y - x = \sqrt{1+x^2}$

$y^2 - 2yx + x^2 = 1 + x^2$

$\Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y}$

$= \int \frac{1}{y} \cdot \frac{y^2+1}{2y^2}\,dy$

$\sqrt{1+x^2} = y - x =$

$= y - \frac{y^2-1}{2y} = \frac{y^2+1}{2y}$

$= \frac{1}{2}\int y^{-3}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y}$

$= -\frac{1}{4y^2} + \frac{1}{2}\ln|y|$

$dx = \frac{y^2+1}{2y^2}\,dy$

• $\int \frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\eta\mu^2 x}\,dx =$

$y = \sigma\varphi x$

$dy = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx$

$= -\int \frac{\ln(\sigma\varphi x)}{\eta\mu^2 x}\,dx$

$= \int \ln y\,dy = y\ln y - x$

(2005) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k$ είναι $R = 1$

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο σύγκλισης της $\sum \alpha_k x^k$ είναι της μορφής $(-R, R)$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 1^k$ συγκλίνει, έχουμε ότι $1 \in$ στο σύνολο σύγκλισης.

Τότε $\forall x \in (-1,1)$ η $\sum \alpha_k x^k$ συγκλίνει απόλυτως $\Rightarrow R \geq 1$.

Αν είχαμε $R > 1$, θα υπήρχε $y > 1$: η $\sum \alpha_k y^k$ συγκλίνει

$$\xRightarrow{1<y} \underset{\underset{\sum |\alpha_k \cdot 1^k|}{\vee}}{\sum |\alpha_k|} < \infty \quad \text{Άτοπο}$$

(2006) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, η οποία είναι ολ/μη σε κάθε $[r, q]$, $r, q \in \mathbb{Q}$

Δείξτε ότι η f είναι ολ/μη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$

Α' τρόπος: Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$

Θεωρούμε ρητούς r, q : $r < a < b < q$

Από την υπόθεση, η f είναι ολ/μη στο $[r, q]$ και από προσθετικότητα είναι ολ/μη στα $[r, a]$, $[a, b]$, $[b, q]$ και

$$\int_r^q f = \int_r^a f + \int_a^b f + \int_b^q f \quad \text{άρα ολ/μη στο } [a, b]$$

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[r,q]$ όπου $a<r<q<b$, r,q ρητοί. Δείξτε ότι η f είναι ολ/μη στο $[a,b]$

Από την Άσκηση 9 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ολ/μη σε κάθε $[x,y]$ όπου $x<y \in \mathbb{R}$ και $a<x<y<b$

Έστω $a<x<y<b$. Από πυκνότητα ρητών υπάρχουν ρητοί r,q στα (a,x) και (y,b):

δηλ. $r,q \in \mathbb{Q}$ και $a<r<x<y<q<b$

Από την υπόθεση υπάρχει το $\int_r^q f$ και αφού $[x,y] \subseteq [r,q]$ από προσθετικότητα υπάρχει το $\int_x^y f$.

(2006) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(a)=f(b)=0$
f' συνεχής και

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 1.$$

a) Δείξτε ότι

$$\int_a^b x f(x) \cdot f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$$

b) $$\left(\int_a^b x^2 f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2\,dx\right) \geq \frac{1}{4}$$

α) $1 = \int_a^b f^2(x)\,dx = \int_a^b (x)' f^2(x)\,dx$

$= \cancel{\left[x f^2(x) \right]_a^b} - \int_a^b x 2 f(x)\cdot f'(x)\,dx$

$f(a)=f(b)=0$

$\Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

β) $\frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\int_a^b x f(x)\cdot f'(x)\,dx \right)^2$

$\underset{C-S}{\leq} \left(\int_a^b x^2 f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b (f'(x))^2\,dx \right)$

(2006) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολ|μες συναρτήσεις

α) Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy \right] dx$$

$$= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

β) Αν οι f, g είναι αύξουσες δείξτε ότι

$$\underbrace{\left(\int_a^b f\right)}_{F} \underbrace{\left(\int_a^b g\right)}_{G} \leq (b-a) \underbrace{\int_a^b fg}_{\Gamma}$$

α) Για σταθερό x θεωρούμε το "μέσο" ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta}(f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\Big(f(y)\cdot g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(x)g(x)\Big)dy$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}f(y)g(y)dy-f(x)\int_{\alpha}^{\beta}g(y)dy-g(x)\int_{\alpha}^{\beta}f(y)dy$$

$$+f(x)\cdot g(x)(\beta-\alpha)$$

$$=\Gamma-f(x)\cdot G-g(x)F+f(x)\cdot g(x)(\beta-\alpha)$$

Τώρα υπολογίζουμε το

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\Big[\Gamma-f(x)\cdot G-g(x)\cdot F+f(x)g(x)(\beta-\alpha)\Big]dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\Gamma(\beta-\alpha)-G\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-F\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx+(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\Gamma(\beta-\alpha)-FG-FG+\Gamma(\beta-\alpha)=\Gamma(\beta-\alpha)-FG$$

(α) ⇒ (β) Αφού οι f, g είναι αύξουσες για κάθε ζεύγος σημείων x, y στο $[a,b]$ οι αριθμοί

$f(y)-f(x)$ και $g(y)-g(x)$ είναι ομόσημοι

(≥ 0 αν $x \leq y$ και ≤ 0 αν $x \geq y$)

$$\Rightarrow (f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geq 0 \quad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^b \left[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\right] dx \geq 0$$

$$\xRightarrow{(\alpha)} (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \geq 0$$

(2007) Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = 0$$

$\Rightarrow f$ σταθερή

Η τιμή της f είναι (για $x=1$)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^1 (\arctan x)'\,dx =$$

$$= 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(2008) Έστω $\alpha_k, \beta_k > 0$. Δείξτε ότι:

"αν οι $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνουν, τότε

η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγκλίνει

1ος τρόπος: $\sum \alpha_k^2$ συγκλίνει και $\sum \beta_k^2$ συγκλίνει
και

$$\alpha_k \beta_k \le \underbrace{\frac{1}{2}\alpha_k^2 + \frac{1}{2}\beta_k^2}_{\text{σειρά που συγκλίνει}}$$

2ος τρόπος: $\frac{\alpha_k \beta_k}{\alpha_k} = \beta_k \longrightarrow 0$ γιατί η $\sum \beta_k$ συγκλίνει

Αφού η $\sum \alpha_k$ συγκλίνει, από οριακό κριτήριο σύγκρισης η $\sum \alpha_k \beta_k$ συγκλίνει.

(2008) $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ τέσσερις φορές παρ/μη με $f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$ και $f^{(4)}(0)>0$. Δείξτε ότι έχει τοπικό ελάχιστο στο 0.

Πρέπει να δείξουμε ότι $\exists\, \delta>0 : \forall x \in (-\delta, \delta)$

$$f(x) \ge f(0) = 0.$$

Θεώρημα: Το $T_{n,f,0}(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\le n$ για το οποίο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_{n,f,0}(x)}{x^n} = 0$$

Στην περίπτωση μας, υπάρχει το:

$$T_{f,4,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4$$

άρα $$T_{f,4,0}(x) = \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4$$

Από το θεώρημα έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4}{x^4} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x^4} - \frac{f^{(4)}(0)}{24}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \frac{f^{(4)}(0)}{24} > 0$$

Άρα $\exists\, \delta > 0 : \forall\ 0 < |x| < \delta$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{x^4} > 0 \quad \Longrightarrow \forall x \in (-\delta, \delta)$$

$$f(x) \geq x^4 \geq 0$$