Απειροστικός Λογισμός 2
Μάθημα 34ο
08/06/2015

Ασκήσεις (επαναληπτικές)

5^1 (2010) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. $\forall [\gamma,\delta]\subseteq[a,b]$ ισχύει $\int_\gamma^\delta f(x)dx=0$. Δείξτε ότι $f\equiv 0$.

Λύση:

Έστω ότι $f\not\equiv 0$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητος $\exists x_0\in[a,b]: f(x_0)>0$.

Παίρνοντας $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$ στον ορισμό της συνέχειας βρίσκουμε $[\gamma,\delta]\subseteq[a,b]$, $x_0\in$:

$\forall x\in[\gamma,\delta]$ $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

Τότε $\int_\gamma^\delta f(x)dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(\delta-\gamma)>0$ Άτοπο.

(2010) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ. Δείξτε ότι

$A.M=\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

Λύση:

$\left(\int_a^b f(x)\cdot\sin x\,dx\right)^2 \overset{C-S}{\leq} \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\int_a^b \sin^2 x\,dx$

$\left(\int_a^b f(x)\cdot\cos x\,dx\right)^2 \overset{C-S}{\leq} \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\int_a^b \cos^2 x\,dx$

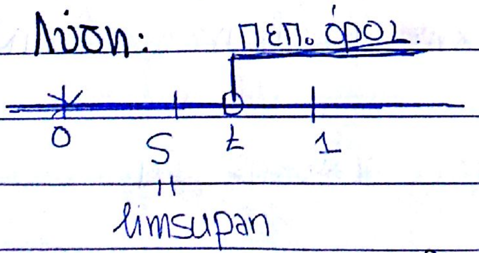
$(+)\Rightarrow$

$\Rightarrow A.M \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left[\int_a^b \sin^2 x\,dx+\int_a^b\cos^2 x\,dx\right]$

$\Rightarrow = \int_a^b(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{=1})dx=b-a$.

(2011) $a_n>0$, $\limsup a_n<1$. Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^\infty a_n^n$ συγκλίνει.

Λύση:



Το $\{a_n: a_n>t\}$ είναι πεπερασμένο.

Έστω $s=\limsup a_n$. Αφού $s<1$, $\exists t: s<t<1$.

Αφού $t>s$, $\exists n_0: \forall n\geq n_0$ $a_n\leq t \Rightarrow a_n^n\leq t^n$

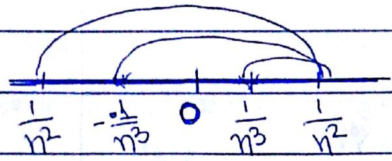
Αφού $t<1$ η $\sum_{n=n_0}^\infty t^n<+\infty$ (γεωμ. σειρά)

Από κρ. σύγκρισης $\sum a_n^n<+\infty$

(2011) $x_n \in \mathbb{R}$: $\frac{(-1)^n}{n^3} \le x_n \le \frac{1}{n^2}$ για κάθε n.

Δείξτε ότι οι $\sum x_n$, $\sum x_n^2$ συγκλίνουν.

Λύση:



• $\forall n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{n^2} \le -\frac{1}{n^3} \le \frac{(-1)^n}{n^3} \le x_n \le \frac{1}{n^2}$$

δηλ. $-\frac{1}{n^2} \le x_n \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow |x_n| \le \frac{1}{n^2}$

Αφού η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum |x_n|$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum x_n$ συγκλίνει

• $|x_n| \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow x_n^2 \le \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum x_n^2$ συγκλίνει.

(2011) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ $0 < a < b$ Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$$

Λύση:

$$\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = \int_a^b \frac{1}{x}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)' dx = \left[-\frac{1}{n}\frac{\cos(nx)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b \frac{\cos(nx)}{x^2}\,dx$$

• $\left|\left[-\frac{1}{n}\frac{\cos(nx)}{x}\right]_a^b\right| \le \frac{1}{n}\left(\frac{|\cos(nb)|}{b} + \frac{|\cos(na)|}{a}\right) \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \to 0$

• $\left|\frac{1}{n}\int_a^b \frac{\cos(nx)}{x^2}\,dx\right| \le \frac{1}{n}\int_a^b \frac{|\cos(nx)|}{x^2}\,dx \le \frac{1}{n}\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx \to 0$

Άρα $\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx \to 0$

(2011) Έστω $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής με $f(n) \ge 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

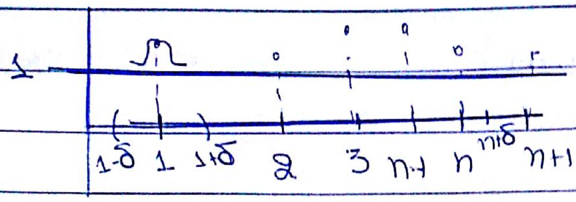
Δείξτε ότι $\int_0^\infty f(x)\,dx = +\infty$

* Παρόμοια: Αν $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής και $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Λύση:

Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Αφού η f ομ. συνεχής $\exists \delta > 0$: "αν $y, z \in [0,+\infty)$ και $|y-z| < \delta$

$\delta < \frac{1}{3}$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{2}$"



Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in [n-\delta, n+\delta]$ Τότε

$$|x-n| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(n)| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > f(n) - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Τότε

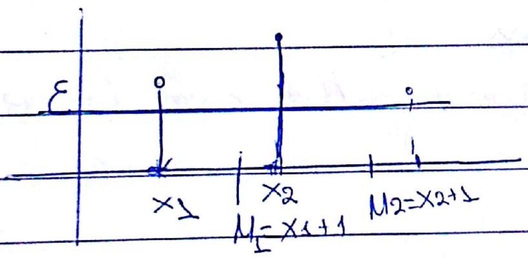
$$\int_0^{n+\delta} f(x)dx \geq \underbrace{\int_{1-\delta}^{1+\delta} f(x)dx}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{2-\delta}^{2+\delta} f(x)dx}_{>\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\int_{n-\delta}^{n+\delta} f(x)dx}_{>\frac{1}{2}}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2}\, 2\delta + \frac{1}{2}\, 2\delta + \dots + \frac{1}{2}(2\delta)}_{n\text{-όροι}}$$

$$= n\delta \to +\infty$$

* **Ιδέα**: Έστω ότι δεν ισχύει "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$"

Τότε $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, M > 0$ μπορούμε να βρούμε $x > M$ ώστε $f(x) \geq \varepsilon$.



$\exists\, x_1 > 1 : f(x_1) \geq \varepsilon$

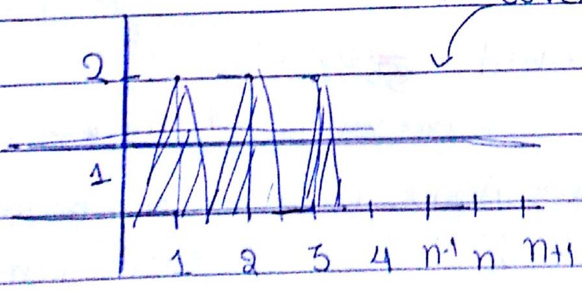
Παίρνω $M_1 = x_1 + 1$ και βρίσκω $x_2 > M_1$: $f(x_2) \geq \varepsilon$

Επαγωγικά βρίσκω $x_{n+1} > x_n + 1$ με $f(x_{n+1}) \geq \varepsilon$

* Συνεχίζω όπως πριν...

Ένα παράδειγμα γιατί χρειάζεται η ομοιόμορφη συνέχεια στην υπόθεση:

συνεχής, ≥ 0 με $\int_0^\infty f < \infty$ και $f(n) \geq 1\ \forall n$



Παίρνω διάστημα $\left[n - \frac{1}{2n^2}, n + \frac{1}{2n^2}\right]$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι $\frac{1}{n^2} \cdot \frac{2 \times 2}{2} = \frac{1}{n^2}$

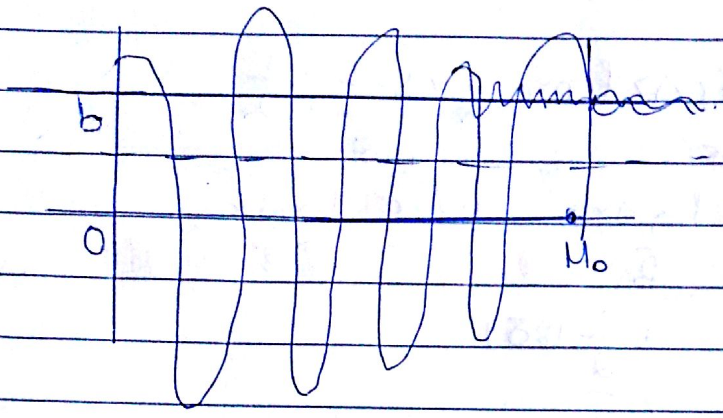
$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Scanned by CamScanner

(2011) $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b>0$

Δείξτε ότι $\int_0^\infty g(x)\,dx=+\infty$

Λύση:



Παίρνουμε $\varepsilon=\frac{b}{2}>0$ και βρίσκουμε $M_0>0$: "$\forall x\geq M$ $|g(x)-b|<b/2$" $\Rightarrow g(x)>\frac{b}{2}$

$\forall N>M_0$

$$\int_0^N g(x)\,dx=\underbrace{\int_0^{M_0} g(x)\,dx}_{a_0}+\int_{M_0}^N \underbrace{g(x)}_{\geq\frac{b}{2}}dx$$

$$\geq a_0+\frac{b}{2}(N-M_0)$$

$$=\left(a_0-\frac{b}{2}M_0\right)+\frac{b}{2}N\xrightarrow{N\to+\infty}+\infty$$

Άρα, $\int_0^\infty g(x)\,dx=\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^N g(x)\,dx=+\infty$

(2012) Αν $a_n\to 0$ δείξτε ότι $\exists\,(a_{k_n})$: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{k_n}|<+\infty$

Λύση:

- Αφού $a_n\to 0$, $\exists\, k_1$: $|a_{k_1}|<1$
- —||— όλοι τελικά οι όροι $|a_n|<\frac{1}{2^2}$ $\Rightarrow\exists\, k_2>k_1$: $|a_{k_2}|<\frac{1}{2^2}$
- —||— όλοι τελικά οι όροι $|a_n|<\frac{1}{3^2}$ $\Rightarrow\exists\, k_3>k_2$ $|a_{k_3}|<\frac{1}{3^2}$

Έτσι ορίζουμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ ώστε $\forall n$ $|a_{k_n}|<\frac{1}{n^2}$. Αφού η $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ $\underset{\text{σύγκριση}}{\Rightarrow}\sum|a_{k_n}|<+\infty$

(2012) Έστω $a_k \in \mathbb{R}$

α) • Αν η $\sum a_k^2$ συγκλίνει τότε η $\sum a_k^3$ συγκλίνει.

β) • Αν η $\sum a_k^3$ —II— $\sum a_k^4$ —II—

γ) • Αν η $\sum a_k$ —II— $\sum a_k^2$ —II—

(γ) <u>ΟΧΙ</u> π.χ. $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

(β) <u>ΟΧΙ</u> π.χ. $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[4]{k}}$ / $\sum a_k^3 = \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k^{3/4}}$ συγκλίνει (Leibniz γτ $\frac{1}{k^{3/4}} \downarrow 0$)

<u>ΑΛΛΑ</u> $\sum a_k^4 = \sum \frac{1}{k} = +\infty$

(α) <u>ΝΑΙ</u> Αφού $\sum a_k^2$ συγκλίνει $\Rightarrow a_k^2 \to 0 \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \ |a_k| \leq 1$

Τότε $\forall k \geq k_0 \ |a_k^3| = a_k^2 |a_k| \leq a_k^2$

Αφού $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^2 < \infty \underset{\text{σύγκριση}}{\Rightarrow} \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k^3| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^3| < \infty \Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκ.

(2014) Έστω (S_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$

Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n} S_n^2}$ συγκλίνει

[Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\frac{1}{\sqrt[4]{n} S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$]

Γενικά: $\boxed{\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \quad \text{όπου } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \ a_n > 0}$

Λύση:

Γράφουμε $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{a_n}{S_n S_{n-1}} \overset{S_{n-1} < S_n}{>} \frac{a_n}{S_n S_n} = \frac{a_n}{S_n^2}$

Τώρα: $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[4]{n} S_n^2} \leq \frac{1}{S_1^2} + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right)$

$= \frac{1}{S_1^2} + \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{S_{N-1}} - \frac{1}{S_N} \right)$

$= \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_N} < \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1} = 2$

Αφού τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}\, S_n^2} < 2$ και έχει θετικούς όρους η σειρά συγκλίνει.

(2013) Εξετάστε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right)$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Ιδέα **Λύση:**

$$\ln(1+x) \overset{N}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{3}} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \dots$$

Περιμένω ότι $\underset{x}{\frac{1}{k}} - \ln\left(1+\underset{x}{\frac{1}{k}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2}{2} = \frac{1}{2k^2}$.

Να ποδω

1ος τρόπος: Δείχνω ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1+x}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Από αρχή της μεταφοράς $\left(\frac{1}{k} \to 0^+\right)$: $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} > 0$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1/k - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right)$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, δηλαδή συγκλίνει.

2ος τρόπος: **Β1** Βρίσκω το $T_{2,f,0}(x)$, $f(x) = \ln(1+x)$

Είναι το $T(x) = x - \frac{x^2}{2}$

Β2 Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T(x)}{x^2} = 0$ (*)

Έχουμε (από την (*)) και Α.Μ.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{k}\right) - T\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{k^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} \right) = 0.$$

Άρα $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$ συνεχίζω όπως στον 1ο τρόπο.

Scanned by CamScanner

E35) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$, f' συνεχής, $0\le f'(x)\le 1$

Ν.δ.ο. $\int_0^1 (f(x))^3dx \le \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

Λύση:

Ορίζουμε $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $G(t)=\left(\int_0^t f(x)dx\right)^2-\int_0^t (f(x))^3dx$

Αν δο. $G'\ge 0$, τότε η G είναι αύξουσα και αφού $G(0)=0$

θα έχουμε $G(1)\ge G(0)=0 \Rightarrow \left(\int_0^1 f\right)^2-\int_0^1 f^3\ge 0$

Παραγωγίζουμε: $G'(t)=2\left(\int_0^t f(x)dx\right)f(t)-(f(t))^3$

$=f(t)\left[2\int_0^t f(x)dx-(f(t))^2\right]$

Αφού για $t\ge 0$ έχουμε $f(t)\ge 0$ (γιατί $f(0)=0$ και $f'\ge 0 \Rightarrow f\uparrow$)

για να δείξουμε ότι $G'(t)\ge 0$ αρκεί να δείξουμε ότι

$H(t)=2\int_0^t f(x)dx-(f(t))^2\ge 0$ αν $t\ge 0$.

Έχουμε $H(0)=2\cdot 0-0=0$.

Άρα αρκεί $H'(t)\ge 0$

Όμως $H'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)(1-f'(t))\ge 0$

E36) $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$, f' συνεχής

Δείξτε ότι $\int_0^a |f(t)\cdot f'(t)|dt \le \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2dt$.

Λύση:

Ας υποθέσουμε (επιπλέον) ότι $f'(t)\ge 0$ Τότε $f\uparrow$ και $f(0)=0 \Rightarrow f(t)\ge 0$

Τότε $\int_0^a |f(t)\cdot f'(t)|dt=\int_0^a f(t)\cdot f'(t)dt=\int_0^a \left(\frac{f^2(t)}{2}\right)'dt=\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^a=\frac{f^2(a)}{2}-\frac{f^2(0)}{2}$

$=\frac{1}{2}(f(a)-f(0))^2=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f'(t)dt\right)^2$

$\overset{C-S}{\le}\frac{1}{2}\left(\int_0^a 1^2dt\right)\left(\int_0^a |f'(t)|^2dt\right)=\frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2dt$

Έστω τυχαία f με $f(0)=0$ και f' συνεχής. Ορίζουμε $g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$, $x\in[0,a]$

Η g είναι παρ/μη γιατί η $|f'|$ είναι συνεχής

$g(0)=0$ και $g'(x)=|f'(x)|\ge 0$ συνεχής

Άρα για αυτή την g ξέρουμε ότι $\int_0^a g(t)\cdot g'(t)dt\le \int\frac{a}{2}\int|g'(t)|^2dt$

$=\frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2dt$

Θέλω επίσης να ισχύει

$\int_0^a |f(t)\cdot f'(t)|dt\le\int_0^a g(t)g'(t)dt$.

Παρατηρούμε ότι $|f(t)|=\left|\int_0^t f'(s)ds\right|\le\int_0^t |f'(s)|ds=g(t)$

Επίσης $|f'(t)|=g'(t)$

Άρα πολ/με κατά μέλη: $|f(t)\cdot f'(t)|\le g(t)g'(t)\ \forall t$

$\Rightarrow \int_0^a |f(t)f'(t)|dt\le\int_0^a g(t)\cdot g'(t)dt$

(2012) Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\dots$

Δείξτε ότι

α) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τοτε $f(0)=0$

β) Αν υπάρχει η $f'(0)$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τοτε $f'(0)=0$.

Λυση:

α) Ξερουμε οτι $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0)$ γτ η f ειναι συνεχής στο 0 (A.M)

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τοτε $a_n \to 0$. Αρα $f(0)=0$ (μοναδικοτητα του οριου για την a_n)

β) $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$

. Αφου $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, απο το (α) εχουμε $f(0)=0$.

Αρα $f'(0) = \lim_{n\to\infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot a_n$

- Εστω οτι $n\cdot a_n \to b>0$. Τοτε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall n \geq n_0 \quad n\cdot a_n > \frac{b}{2} \Rightarrow \forall n\geq n_0 \quad a_n \geq \frac{b}{2n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{b}{2n}$ συγκλίνει. Ατοπο.

- Εστω οτι $n\cdot a_n \to \gamma<0$ Τοτε $\exists n_0\in\mathbb{N}$:
$\forall n\geq n_0 \quad n\cdot a_n < \frac{\gamma}{2} \Rightarrow n(-a_n) > \frac{|\gamma|}{2} \Rightarrow -a_n > \frac{|\gamma|/2}{n}$

Όμως $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty}(-a_n)$ συγκλίνει $\xrightarrow[\text{συγκριση}]{} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|\gamma|}{2n}$ συγκλίνει Ατοπο.

Αρα $n\cdot a_n \to 0$.

(2013) $a_n, b_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, (b_k) φθίνουσα και κατω φραγ.

Δείξτε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

Λυση:

- Η (b_k) ειναι φθίνουσα και κατω φραγ αρα συγκλίνει $b_k \downarrow M \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \boxed{b_k - M \downarrow 0}$

- Αν $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, τοτε η (S_n) ειναι φρ γιατι η $\sum a_k$ συγκλίνει.
Απο Dirichlet, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - M)$ συγκλίνει.

- Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k M = M\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει γιοτι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Αρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k(b_k-M) + a_k M] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - M) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k M$ συγκλίνει.

E58 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγ/μη, $f(0)=f(1)=0$.
Αν $|f''(x)|\le M\ \forall x\in(0,1)$ δείξτε ότι $|f'(x)|\le \frac{M}{2}\ \forall x\in[0,1]$.

Λυση:

παρόμοια: [$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$ και f'= συνεχής Δείξτε ότι $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\le\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx$]

Θεωρούμε το $T_{1,f,x}(t)=f(x)+f'(x)(t-x)$

Ξέρουμε ότι $\forall y$ $f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{f''(\xi_y)}{2}(y-x)^2$ για κάποιο ξ ανάμεσα στα x και y.

Για $y=0,1$ βρίσκουμε ξ_1 στο $(0,x)$ και ξ_2 στο $(x,1)$:

- $f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2$

  $\Rightarrow 0=f(x)-xf'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2$. (1)
- $f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$

  $\Rightarrow 0=f(x)+f'(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$ (2)

(1) - (2):

$-f'(x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2=0-0=0$

$$\Rightarrow |f'(x)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2\right|$$
$$\le\frac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2+\frac{|f''(\xi_2)|}{2}(1-x)^2$$
$$\le\frac{M}{2}\underbrace{[x^2+(1-x)^2]}_{\le 1}$$
$$\le\frac{M}{2}$$

(2014) α) $a_n=\int_1^n\frac{\cos x}{x^2}dx$ Δείξτε ότι αν $m>n$ τότε $|a_m-a_n|\le\frac{1}{2}$ και συμπεράνατε ότι a_n συγκλίνει.

β) Δείξτε ότι το $\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{\sin x}{x}dx$.

Λυση:

α) Έστω $m>n$ $|a_m-a_n|=\left|\int_1^m\frac{\cos x}{x^2}dx-\int_1^n\frac{\cos x}{x^2}dx\right|=\left|\int_n^m\frac{\cos x}{x}dx\right|$

$$\le\int_n^m\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx\le\int_n^m\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{x}\right]_n^m=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$$

Από την $|a_m-a_n|<\frac{1}{n}$ έπεται ότι (a_n) βασική άρα συγκλίνει.

Έστω ε>0 $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ (Αρχ. Ευδ.)

Τότε $\forall m>n>n_0$ $|a_m-a_n|\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Άρα η a_n βασική.

β) Γράφουμε $b_n=\int_1^n\frac{\sin x}{x}dx=\int_1^n\frac{1}{x}(-\cos x)'dx=\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^n-\int_1^n\frac{\cos x}{x^2}dx$

$=-\frac{\cos n}{n}+\cos 1-a_n\to\cos 1-\lim a_n$ ∎

Ε1 Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία <u>δεν</u> συγκλίνει αλλά έχει την εξής ιδιότητα: " $\forall k \in \mathbb{N}$ η $a_{n+k} - a_n \to 0$ "

<u>Λύση</u>:

<u>1ο παρ.</u> $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty$

Έστω $k \in \mathbb{N}$ Τότε

$a_{n+k} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) =$

$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k} \leq \frac{k}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

<u>2ο παρ</u> $a_n = \ln n$

<u>$\forall k \geq 1$</u> $a_{n+k} - a_n = \ln(n+k) - \ln n = \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \to \ln 1 = 0$.

Ε2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f φρξ. Νδο $\exists$ γν. αύξουσα ακολουθία $(x_n) \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x_n)$ να συγκλίνει.

<u>Λύση</u>:

Θεωρώ την $y_n = n$ (Η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Έχω $f(y_n) = f(n)$ Η $f(n)$ είναι φρξ ακολουθία γι η f είναι φρξ

Από B-W Η $(f(y_n))$ έχει υποακολουθία: $f(y_{k_n}) \to \ell \in \mathbb{R}$

Ορίζω $x_n = y_{k_n} \to f(x_n) = f(y_{k_n}) \to \ell$

$\to$ Η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα (είναι υπακολουθία της γν. αύξουσας y_n)

Ε49 $f_0: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$\forall k = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\,dt$

Δείξτε ότι $f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f_0(t)(x-t)^{k-1}\,dt$.

<u>Λύση</u>:

(Με επαγωγή)