Μάθημα 1ο

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

• Τυπικός ορισμός : $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Θέτουμε $a_n = a(n)$ και

γράφουμε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορσ. , $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 1}$, ...

• Λέμε οτι η (a_n) συγκλίνει στον $a\in\mathbb{R}$, αν "για καθε $\varepsilon>0$ υπαρχει $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: για καθε $n\geq n_0$ ισχυει $|a_n-a|<\varepsilon$".

Βασικά Θεωρήματα

> $a_n \longrightarrow a$ και $a_n \longrightarrow b \Rightarrow a=b$

> (a_n) συγκλίνει $\Rightarrow$ (a_n) : φραγμένη

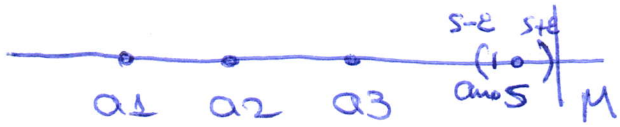
> $$\left.\begin{matrix} a_n \longrightarrow a \\ b_n \longrightarrow b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_n+b_n \longrightarrow a+b \\ a_n b_n \longrightarrow a\cdot b \end{matrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η (a_n) ειναι μονοτονη και φραγμένη τότε συγκλίνει.

Αποδειξη

Εστω οτι η (a_n) ειναι αυξουσα και οτι υπάρχει $M\in\mathbb{R}$: $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n\leq M$



Ορίζουμε $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ – το σύνολο όλων των όρων της (a_n).
Είναι άνω φραγμένο από το M και μη κενό (διότι $a_1\in A$).
Άρα υπάρχει ο $s=\sup A\leq M$

Δείχνουμε ότι $a_n\to s$.
Παίρνουμε $\varepsilon>0$ και θεωρούμε το $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$.
Απο χαρακτηρισμό του supremum $\exists n_0$ –
$s-\varepsilon< a_{n_0}\leq s$

Τοτε για καθε $n\geq n_0$ εχουμε:
$$s-\varepsilon<\underbrace{a_{n_0}\leq a_n}_{(a_n)\uparrow}\underbrace{\leq s}_{s \text{ ανω φραγμα του } A}<s+\varepsilon$$

Υπενθύμιση

- $a_n\to+\infty \underset{\text{ορσ.}}{\iff} \forall M>0\ \exists n_0 : \forall n\geq n_0\ a_n>M$
- $a_n\to-\infty \underset{\text{ορσ.}}{\iff} \forall M>0\ \exists n_0 : \forall n\geq n_0\ a_n<-M$
- a_n: φραγμένη $\underset{\text{ορσ.}}{\iff} \exists M>0 : \forall n\in\mathbb{N}\ |a_n|\leq M$.

Ορισμός (υπακολουθία)

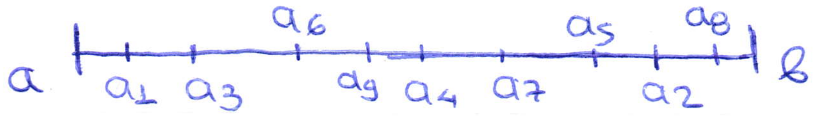
Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$.
Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (δηλ. $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$) τότε η ακολουθία (a_{k_n}) λέγεται υπακολουθία της (a_n).

$$(a_{k_n}) = (b_n)$$

Παραδείγματα

1) $k_n = 2n \uparrow \rightarrow a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$
(η υπακολουθία των αρτίων όρων της (a_n))
2) $k_n = 2n-1 \uparrow \rightarrow a_1, a_3, a_5, \dots$
(η υπακολουθία των ~~..~~ περιττών όρων της (a_n))
3) $k_n = n^2 \uparrow \rightarrow a_1, a_4, a_9, \dots$
4) $k_n = 2^n \uparrow \rightarrow a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots$

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Ας πούμε ότι όλοι οι όροι της είναι στο $[a, b]$.



Η a_n μπορεί να μη συγκλίνει. Όμως, ισχύει το θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία που συγκλίνει.

Πρόταση

Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον μια μονότονη υπακολουθία.

Πρώτη απόδειξη του θεωρήματος B-W:

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Δηλαδή υπάρχουν $a<b$ στο $\mathbb{R}$ ώστε "$\forall n \; a \leq a_n \leq b$". Από την πρόταση, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία είναι μονότονη.

Επίσης, $\forall n$ $a \leq a_{k_n} \leq b$.
Άρα, η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη.
Έπεται ότι η (a_{k_n}) συγκλίνει.

Ορισμός

Αν (a_n) είναι ακολουθία στο $\mathbb{R}$ τότε λέμε ότι ο όρος a_m είναι σημείο κορυφής της (a_n) αν για κάθε $n \geq m$ ισχύει $a_n \leq a_m$.

Απόδειξη της Πρότασης

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(A) Η (a_n) έχει άπειρα σημεία κορυφής.
Τότε υπάρχουν:

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$$

ώστε κάθε a_{k_n} να είναι σημείο κορυφής της (a_n).
Η (a_{k_n}) είναι φθίνουσα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $k_{n+1} > k_n$ και ο a_{k_n} είναι σημείο κορυφής, άρα $a_{k_{n+1}} \leq a_{k_n}$

(B) Η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής.

Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα:
$\forall n \geq N$ ο a_n <u>δεν</u> είναι σημείο κορυφής της a_n.
Θέτουμε $k_1 = N$. Ο a_{k_1} <u>δεν</u> είναι σημείο κορυφής της (a_n) άρα υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$.
Αφού $k_2 > N$, ο a_{k_2} δεν είναι σημείο κορυφής της (a_n).

Επαγωγικά: $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$
με $a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} \ldots$

Η (a_{k_n}) είναι (γνησίως) αύξουσα.

Θεώρημα

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.
Τότε, η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M>0$ ώστε για κάθε $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$

Απόδειξη

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο M.
Παίρνω $M=1$. Υπάρχει $x_1 \in [a,b]$: $|f(x_1)| > 1$.
Παίρνω $M=2$. -//- $x_2 \in [a,b]$: $|f(x_2)| > 2$.
Γενικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a,b]$:
$|f(x_n)| > n$

Από Bolzano-Weirstrass, η (x_n) έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον $a \leq x_{k_n} \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b]$.
$\downarrow$
x

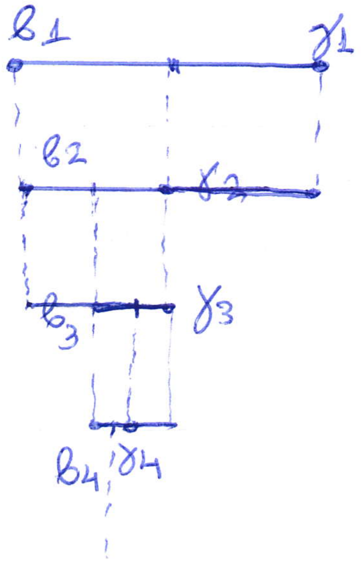
Από την αρχή της μεταφοράς:
$f(x_{k_n}) \to f(x)$
Άρα η $(f(x_{k_n}))$ είναι φραγμένη, Άτοπο.
γιατί $|f(x_{k_n})| > k_n$ (από την επιλογή του x).
και $k_n \to +\infty$ (γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών).

Λήμμα.

Αν k_n γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών τότε $k_n \geq n$ για κάθε n.

Δεύτερη Απόδειξη του B-W. (με την αρχή κιβωτισμένων διαστημάτων)

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Υπάρχουν $\beta_1 < \gamma_1$ ώστε "$\forall n \in \mathbb{N}$ $\beta_1 \leq a_n \leq \gamma_1$"



- Όλοι οι a_n στο $[\beta_1, \gamma_1]$

- Σε κάποιο από τα δυο "μισά" υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n).

- Στο $[\beta_3, \gamma_3]$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n).

Επαγωγικά, ορίζουμε κλειστά διαστήματα $[\beta_n, \gamma_n]$ με τις εξής ιδιότητες:

1) $[\beta_1, \gamma_1] \supseteq [\beta_2, \gamma_2] \supseteq [\beta_3, \gamma_3] \supseteq \dots$
(τα διαστήματα είναι κιβωτισμένα)
2) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $[\beta_n, \gamma_n]$ έχει μήκος $\gamma_n - \beta_n = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0$

3) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $[\beta_n, \gamma_n]$

• Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων υπάρχει μοναδικό $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [b_n, \gamma_n]$ (δηλ. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [b_n, \gamma_n] = \{a\}$)

Επιπλέον, $\forall n$ $|b_n - a|, |\gamma_n - a| \leq \frac{\gamma_n - b_n}{2^{n-1}} \to 0$

Δηλαδή $b_n \to a$, $\gamma_n \to a$

• Θα ορίσουμε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to a$.

Βήμα 1:
Στο $[b_1, \gamma_1]$ έχουμε όλη την (a_n). Παίρνουμε κάποιον, τον a_{k_1}.

Βήμα 2
Στο $[b_2, \gamma_2]$ έχουμε άπειρους a_n άρα και κάποιον με δείκτη $k_2 > 1$. Κρατάμε τον a_{k_2}.

⋮

Αν έχουμε ορίσει $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}$ με $a_{k_j} \in [b_j, \gamma_j]$ και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ στο $[b_{n+1}, \gamma_{n+1}]$ υπάρχουν άπειροι όροι a_n, άρα και κάποιοι $a_{k_{n+1}}$ με $k_{n+1} > k_n$.

Έτσι, έχουμε ορίσει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n):
$\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \leq a_{k_n} \leq \gamma_n$.

Τότε $\forall n$ έχουμε $a_{k_n}, a \in [b_n, \gamma_n] \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_{k_n} - a| \leq \gamma_n - b_n = \frac{\gamma_1 - b_1}{2^{n-1}} \to 0$

Άρα $a_{k_n} \to a$

Παρατηρήσεις για την υπακολουθία

(1) $\mathbb{N} \xrightarrow[k]{} \mathbb{N} \xrightarrow[a]{} \mathbb{R}$ $\qquad (a \circ k)(n) = a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$

(γνησίως αύξουσα)

Τι σημαίνει "παίρνω υπακολουθία της (a_{k_n})"

$$\mathbb{N} \xrightarrow[\lambda]{} (\mathbb{N} \xrightarrow[k]{} \mathbb{N} \xrightarrow[a]{} \mathbb{R})$$

(γνησίως αύξουσα)

(γνησίως αύξουσα)

Η $(a \circ k) \circ \lambda = a \circ \underbrace{(k \circ \lambda)}$

(γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών)

άρα είναι υπακολουθία της (a_n).

Επιπλέον, $[(a \circ k) \circ \lambda](n) = (a \circ k)(\lambda(n)) = (a \circ k)(\lambda_n) =$
$= (a \circ k)(\lambda_n) = a(k(\lambda_n)) = a(k_{\lambda_n}) = a_{k_{\lambda_n}}$

(2) Πόσες υπακολουθίες έχει μια ακολουθία;
Δεν μπορούμε να ξέρουμε.

Παράδειγμα

$(a_n) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
Η a_n έχει μόνο μία υπακολουθία (την (a_n))

Μια ακολουθία με έξι υπακολουθίες είναι η $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \dots)$

Απόδειξη Λήμματος

Με επαγωγή: Για $n=1$: $k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 \geq 1$

Έστω ότι $k_n \geq n$.

Αφού η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} k_{n+1} > k_n \\ \text{και } k_n \geq n \end{array}\right\} \Rightarrow k_{n+1} > n \Rightarrow k_{n+1} \geq n+1$$

(γιατί ο επόμενος φυσικός από τον n είναι ο $n+1$)

Πρόταση

Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητούμε $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |a_{k_n} - a| < \varepsilon$

Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

"για κάθε $s \geq n_0$ ισχύει $|a_s - a| < \varepsilon$" (*)

Έστω $n \geq n_0$. Τότε $\underset{\text{ΛΗΜΜΑ}}{k_n \geq n} \geq n_0$

οπότε $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ από την (*)

Εφαρμογή

Αν η (a_n) έχει δύο υπακολουθίες

$a_{k_n} \to b$ και $a_{\lambda_n} \to \gamma$ και $b \neq \gamma$

τότε η (a_n) δεν συγκλίνει.

Εξήγηση

Αν είχαμε $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε από την Πρόταση: θα είχαμε

$$\left.\begin{array}{l} a_{k_n} \to a \\ a_{\lambda_n} \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \beta \\ a = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \gamma \text{ άτοπο}$$

Παραδείγματα

$a_n = (-1)^n$

$a_{2n-1} = -1 \to -1$

$a_{2n} = 1 \to 1$

Άρα η a_n δεν συγκλίνει.

Βασικές ακολουθίες (Ακολουθίες Cauchy)

Αρχική Παρατήρηση:

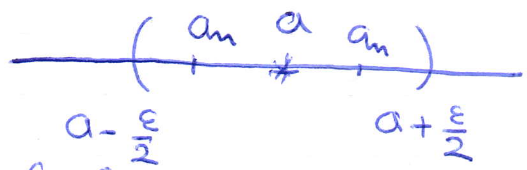
Έστω ότι $a_n \to a$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall s \geq n_0$ $|a_s - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Έστω $m, n \geq n_0$.

Τότε, $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Longrightarrow$



$$\Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ορισμός

Μια ακολουθία (a_n) λέγεται βασική (ακολουθία Cauchy) αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: "για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$." (*)

Παρατηρήσεις

1) Αν η (a_n) είναι βασική, τότε: $a_{n+1} - a_n \to 0$.
(διαδοχικοί όροι "έρχονται πολύ κοντά")

Πράγματι: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (a_n) είναι βασική, υπάρχει n_0 ώστε να ικανοποιείται η ⊛.

Παίρνουμε $n \geq n_0$. Ισχύει και $\underbrace{n+1}_{m} > n \geq n_0 \overset{⊛}{\Longrightarrow}$
$\overset{⊛}{\Longrightarrow} |\underbrace{a_{n+1} - a_n}_{b_n}| < \varepsilon$ Άρα, $b_n = a_{n+1} - a_n \to 0$.

2) Αν $a_{n+1} - a_n \to 0$ δεν έπεται αναγκαστικά ούτε ότι η (a_n) είναι βασική ούτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Παράδειγμα

$a_1 = 1$
$a_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
$a_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\vdots$
$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

α) $a_{n+1} - a_n = \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$
$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 0$

β) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$
Αφού $\sqrt{n} \to +\infty$, τότε $a_n \to +\infty$

γ) Η (a_n) δεν είναι βασική.

$$a_{2n}-a_n=\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\cancel{\ldots}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}-\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\cancel{\ldots}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\geq$$

$$\geq\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ όροι}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\longrightarrow+\infty$$

Έστω ότι η (a_n) είναι βασική. Για $\varepsilon=1$
$\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω $\forall n,m\geq n_0$ $|a_n-a_m|<1$

Παίρνω $n\geq n_0$ και $m=2n>n\geq n_0$
Τότε $|a_{2n}-a_n|<1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow n<2 \Rightarrow n=1$

Δηλ. $\forall n\geq n_0$ ισχύει $n=1$. Άτοπο!

$$\begin{tikzcd} & \text{Συγκλίνουσες} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{ΒΑΣΙΚΕΣ} \arrow[rr, Rightarrow] & & a_{n+1}-a_n\to 0 \arrow[ul, bend right, "\times"'] \arrow[ll, bend left, "\times"] \end{tikzcd}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια ακολουθία (a_n) είναι βασική αν και μόνο αν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη

Συγκλίνει $\Longrightarrow$ Βασική ✓

Για το αντίστροφο:

Έστω (a_n) βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Βήμα 1: Αν η (a_n) είναι βασική τότε είναι φραγμένη.

Βήμα 2: Αν η (a_n) είναι βασική και έχει κάποια υπακολουθία $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$ τότε $a_n \to a$.

Μετά απο αυτό λέμε: Απο Βήμα 1 η (a_n) είναι φραγμένη, απο B-W έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία (a_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιον a, και απο Β2 $a_n \to a$.

Βήμα 1: Έστω (a_n) βασική.

Παίρνουμε $\varepsilon = 1$.

Αφου η (a_n) είναι βασική, υπαρχει n_0:

$\forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1$.

Ειδικότερα, για $m = n_0$ και για κάθε $n \geq n_0$.

έχουμε $|a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}|$

Ορίζουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1+|a_{n_0}|\}$

$M < 1 + |a_{n_0}|$

Τοτε $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$ Άρα a_n: φραγμένη.