Καλώς ήρθατε στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ !

(Δεύτερο Μέρος)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17

Ομοιόμορφη συνέχεια

Υπενθύμιση

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν για κάθε $x_0 \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad y \in A \quad \text{και} \quad |x_0 - y| < \delta \quad \text{τότε}\ |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon.$$

Από τι εξαρτάται το δ;

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = x$ μπορώ $0 < \delta < \varepsilon$.

(β) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $g(x) = x^2$ βρίσκω βέλτιστο $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2+\varepsilon}+x_0}$.

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ξανά:

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ *και* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Λέμε ότι η* f *είναι* ***συνεχής*** *στο* A *αν για κάθε* $x_0 \in A$ *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *μπορούμε να βρούμε* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *ώστε*

$$\textit{αν} \quad y \in A \quad \textit{και} \quad |x_0 - y| < \delta \quad \textit{τότε}\, |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon.$$

Σύγκρινε:

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$\textit{αν} \quad x, y \in A \quad \textit{και} \quad |x - y| < \delta \quad \textit{τότε}\, |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.1.12}$$

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$(3.1.12) \quad \textit{αν} \quad x, y \in A \quad \textit{και} \quad |x - y| < \delta \quad \textit{τότε}\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Πρόταση

Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.

Παραδείγματα

(α) Η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Η $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ του (β), περιορισμένη όμως στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, όπου $M > 0$. Είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$.

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ορισμός

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *Lipschitz συνεχής* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

(3.1.15)
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Πρόταση

Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Πρόταση

Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε: $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Τότε, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M.

Υπενθύμιση Μια $f : A \to \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Θεώρημα

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.2.1}$$

Παραδείγματα Η $f(x) = \sin(x^2)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (και φραγμένη), αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η $g(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ομοιόμορφη συνέχεια: η άρνηση

Ομοιόμορφη συνέχεια:

$\forall \varepsilon > 0\ (\exists \delta > 0 : x, y \in A\ \&\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) = P(\varepsilon)$

Όχι ομοιόμορφη συνέχεια:

$\exists \varepsilon > 0 : \quad \text{OXI } P(\varepsilon)$

$\text{OXI } P(\varepsilon) = (\nexists \delta > 0 : (x, y \in A\ \&\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon))$

$\iff \forall \delta > 0 : (x, y \in A\ \&\ |x - y| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\iff \forall \delta > 0 : (\exists x_\delta, y_\delta \in A \text{ με } |x_\delta - y_\delta| < \delta\ \&\ |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon)$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (\exists x_n, y_n \in A \text{ με } |x_n - y_n| < \frac{1}{n}\ \&\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon)$

Συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Τότε, η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $[a, b]$.

Βασικές σε βασικές: Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0, 1]$. Όμως: η $x_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0, 1]$, ενώ η $f(x_n) = n$ όχι.

Πρόταση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ *ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω* (x_n) *ακολουθία Cauchy στο* A. *Τότε, η* $(f(x_n))$ *είναι ακολουθία Cauchy.*

Συστολές – θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *λέγεται (γνήσια) συστολή αν υπάρχει* $0 < M < 1$ *ώστε: για κάθε* $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \tag{3.4.1}$$

Προφανώς, κάθε συστολή είναι Lipschitz συνεχής.

Θεώρημα (θεώρημα σταθερού σημείου)

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *γνήσια συστολή. Υπάρχει μοναδικό* $y \in \mathbb{R}$ *με την ιδιότητα*

$$f(y) = y. \tag{3.4.2}$$

Υπενθύμιση Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A$ (supremum) (αξίωμα πληρότητας του $\mathbb{R}$). Άρα κάθε μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο B του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf B$ (infimum).

Αν $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και B φραγμένο (δηλ. άνω και κάτω) τότε $\sup A \leq \sup B$ και $\inf A \geq \inf B$.

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός

Έστω $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα. Διαμέριση του $[a,b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\} \tag{4.1.1}$$

του $[a,b]$ με $x_0=a$, $x_k\leq x_{k+1}$ και $x_n=b$. Θα γράφουμε

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\} \tag{4.1.3}$$

$\mathscr{P}[a,b]:=$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων P του $[a,b]$.

Όταν $P\subseteq Q$ λέμε ότι η Q είναι εκλέπτυνση της P.

Αν $P_1,P_2\in\mathscr{P}[a,b]$ τότε η $Q:=P_1\cup P_2\in\mathscr{P}[a,b]$ είναι η κοινή εκλέπτυνση των P_1 και P_2.

Ολοκλήρωμα Riemann

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $P \in \mathscr{P}[a, b]$, ορίζουμε

$$\begin{aligned}
m_k(f, P) &= m_k = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\} \\
M_k(f, P) &= M_k = \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\} \\
L(f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
U(f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k).
\end{aligned}$$

Ιδιότητες των άνω και κάτω αθροισμάτων:

Αν P, Q είναι διαμερίσεις του $[a, b]$,

(α) $L(f, P) \leq U(f, P)$.

(β) Αν $P \subset Q$, τότε $L(f, P) \leq L(f, Q)$ και $U(f, P) \geq U(f, Q)$.

(γ) Για κάθε P, Q, $L(f, P) \leq U(f, Q)$.

(δ) $\sup\{L(f, P) : P \in \mathscr{P}[a, b]\} \leq \inf\{U(f, Q) : Q \in \mathscr{P}[a, b]\}$.

Απόδειξη της (β)

Υποθέτω πρώτα $Q = P \cup \{s\}$, οπότε υπάρχει k ώστε
$Q = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < s < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$.
$M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \geq \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq s\} := M_k'$
και
$M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \geq \sup\{f(x) : s \leq x \leq x_{k+1}\} := M_k''$

$$\text{άρα} \qquad \begin{aligned} M_k(x_{k+1} - x_k) &= M_k(x_{k+1} - s) + M_k(s - x_k) \\ &\geq M_k''(x_{k+1} - s) + M_k'(s - x_k) \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{j=0, j\neq k}^{n-1} M_j(x_{j+1} - x_j) + M_k(x_{k+1} - x_k) \\ &\geq \sum_{j=0, j\neq k}^{n-1} M_j(x_{j+1} - x_j) + M_k''(x_{k+1} - s) + M_k'(s - x_k) = U(f, Q) \end{aligned}$$

κ.λπ. ...

Ολοκλήρωμα Riemann

Το κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{ L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \right\}.$$

Το άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{ U(f,Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a,b] \right\}.$$

Έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Η κοινή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της f στο $[a, b]$ λέγεται ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f.$$

Ολοκλήρωμα Riemann

Θεώρημα (κριτήριο του Riemann)

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.2.1}$$

Θεώρημα (κριτήριο του Riemann)

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f, P_n) - L(f, P_n) \big) = 0. \tag{4.2.8}$$

Τότε ισχύει $\displaystyle \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n).$

Κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Θεώρημα

Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Θεώρημα

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Πρόταση

Αν $f(x) = c$ *για κάθε* $x \in [a, b]$, *τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a). \tag{4.4.1}$$

Θεώρημα

Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η* $f + g$ *είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.5}$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη και έστω* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε, η* λf *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.14}$$

Θεώρημα (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *τότε η* $\lambda f + \mu g$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.23}$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a, b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c, b]$. Τότε, ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.24}$$

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{4.4.38}$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Πόρισμα

(α) *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{4.4.41}$$

(β) *Έστω* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι* $f(x) \geq g(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.42}$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to [m, M]$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω* $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Τότε, η* $\phi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη.*

Θεώρημα

Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(α) *η* f^2 *είναι ολοκληρώσιμη.*

(β) *η* fg *είναι ολοκληρώσιμη.*

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η* $|f|$ *είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{4.4.49}$$

Σχέδιο Απόδειξης

$$\phi \circ f : [a,b] \xrightarrow{f} [m,M] \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$

$\phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής άρα

(ι) φραγμένη: υπάρχει $A > 0$ ώστε $|\phi(\xi)| \leq A \quad \forall \xi \in [m,M]$.

(ιι) ομοιόμορφα συνεχής: $\forall \varepsilon_1 > 0$, υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon_1$ (μπορώ) ώστε:

$\forall \xi, \eta \in [m,M]$ με $|\xi - \eta| < \delta$ ισχύει $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1$. (1)

Για το δ, υπάρχει

$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2. \quad (2)$$

Θέτουμε

$$I = \{0 \leq k \leq n-1 : M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$
$$J = \{0 \leq k \leq n-1 : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}.$$

Σχέδιο Απόδειξης ΙΙ

Αν $k \in I$, τότε

$$
\begin{aligned}
x, x' \in [x_k, x_{k+1}] &\Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq M_k(f) - m_k(f) < \delta \\
&\overset{(1)}{\Rightarrow} |(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| < \varepsilon_1 \\
&\Rightarrow M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq \varepsilon_1. \quad (\text{γιατί;})
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) &\leq \varepsilon_1 \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \\
&\leq (b - a)\varepsilon_1. \; (3)
\end{aligned}
$$

Σχέδιο Απόδειξης III

Αν $k \in J$ έχουμε, $M_k(f) - m_k(f) \geq \delta$ άρα

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) \overset{(2)}{<} \delta^2,$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) + m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \sum_{k \in J} (A + A)(x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1. \quad (4) \end{aligned}$$

Σχέδιο Απόδειξης IV

$$U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k)$$

$$=\sum_{k\in I}(M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k)+\sum_{k\in J}(M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k)$$

$$<(b-a)\varepsilon_1+2A\varepsilon_1 \qquad \text{από (3) και (4).}$$

Για κάθε $\varepsilon>0$, θέτω $\varepsilon_1:=\dfrac{\varepsilon}{(b-a)+2A}$, όποτε υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon_1)$ ώστε (1), υπάρχει $P=P(\delta)$ ώστε (2), οπότε για την P ισχύει $U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P)<\varepsilon$: OK από κριτήριο Riemann.

Σύμβαση

(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).

(β) αν $a > b$ και η $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπάρχει άραγε πάντα $\xi \in [a, b]$ με την ιδιότητα

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \ ?$$

Παράδειγμα $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Θεώρημα (θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.3}$$

Σύμβαση

Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ αν η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και, επιπλέον, στα άκρα υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{και} \quad f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Γράφουμε $f'(a) = f'_+(a)$ και $f'(b) = f'_-(b)$.

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Ορισμός (αόριστο ολοκλήρωμα)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είδαμε ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, x]$ *για κάθε* $x \in [a, b]$*. Το* ***αόριστο ολοκλήρωμα*** *της* f *είναι η συνάρτηση* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *που ορίζεται από την*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.2.1}$$

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα* F *της* f *είναι συνεχής συνάρτηση στο* $[a, b]$*.*

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η* f *είναι συνεχής στο* $x_0 \in [a,b]$, *τότε η* F *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{5.2.2}$$

Θεώρημα (πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειρ. Λογισμού)

Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα* F *της* f *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{5.2.3}$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγεται παράγουσα της f (ή αντιπαράγωγος της f) αν $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Θεώρημα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f, τότε

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Παράδειγμα

$G:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $G(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1]\end{cases}$

Είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ αλλά δεν ισχύει η ισότητα

$G(b)-G(a)=\int_a^b G'(x)dx.$

Θεώρημα (δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειρ. Λογισμού)

Έστω $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b)-G(a). \tag{5.2.10}$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Συμβολισμός. Αν $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, γράφουμε

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Θεώρημα (ολοκλήρωση κατά μέρη)

Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε

$$\int_a^x fg' = (fg)(x) - (fg)(a) - \int_a^x f'g. \tag{5.3.2}$$

Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{5.3.3}$$

Υπενθύμιση:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

«Δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού»:

Πόρισμα

Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η g είναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx. \tag{5.3.6}$$

Θεώρημα (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης)

Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I = \phi([a,b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds. \tag{5.3.11}$$

Υπενθύμιση:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1} = (g^{-1} \circ g)' = [(g^{-1})' \circ g)] \cdot g'$$

Θεώρημα (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης)

Έστω $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη με $\psi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $I = \psi([a,b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_a^b f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)(\psi^{-1})'(s)\,ds. \tag{5.3.17}$$

Υπενθύμιση

Θεώρημα (L'Hospital)

Έστω $f, g : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ *και* $g'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$.

(β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, *τότε υπάρχει το* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *και*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παρατήρηση 1 *Κάθε πολυώνυμο p βαθμού $\leq n$ γράφεται*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Συνεπώς δύο πολυώνυμα p, q είναι ίσα αν και μόνον αν
$p^{(k)}(0) = q^{(k)}(0)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 2 *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε πολυώνυμο q γράφεται*

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Συνεπώς δύο πολυώνυμα p, q είναι ίσα αν και μόνον αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Πολυώνυμα Taylor

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[c,d]\subseteq\mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι σε κάποιο σημείο $a\in[c,d]$ οι παράγωγοι $f^{(k)}(a)$ υπάρχουν για $k=1,\ldots,n$.

Ορισμός

Το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ (ή $T_{n,a}$, όταν η f εννοείται) βαθμού n για την f στο σημείο a ορίζεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} T_{n,f,a}(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (f^{(0)}\equiv f). \end{aligned}$$

Όταν $a=0$, το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ ονομάζεται επίσης πολυώνυμο MacLaurin.

Πολυώνυμα Taylor

Πρόταση (Συμπεριφορά στο σημείο a)

Έστω $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, n φορές παραγωγίσιμη στο $a \in [c,d]$.
Το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο p βαθμού $\leq n$ που ικανοποιεί τις $n+1$ ισότητες

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Πρόταση (Συμπεριφορά κοντά στο σημείο a)

Έστω $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[c,d]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο $a \in [c,d]$.
Το όριο

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} \text{ υπάρχει και είναι } = 0.$$

Πολυώνυμα Taylor

Παρατήρηση *Αν το $T_{n,f,a}$ υπάρχει, τότε*

$$T'_{n,f,a}(x) = T_{(n-1),f',a}(x).$$

γιατί

$$T_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\begin{aligned} T'_{n,f,a}(x) &= 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &= T_{(n-1),f',a}(x). \end{aligned}$$

Πολυώνυμα Taylor

Πρόταση

Έστω $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, $n-1$ *φορές παραγωγίσιμη στο* $[c,d]$ *και* n *φορές παραγωγίσιμη στο* $a \in [c,d]$. *Το* $T_{n,f,a}$ *είναι το μοναδικό πολυώνυμο* p *βαθμού* n *που ικανοποιεί*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Θεώρημα Taylor

Θεώρημα (Taylor)

Έστω $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση για την οποία υπάρχει η παράγωγος* $f^{(n+1)}(t)$ *για κάθε* $t \in [c,d]$ *και έστω* $a \in [c,d]$. *Τότε, για κάθε* $x \in [c,d]$:

(α) *(Μορφή Cauchy) Υπάρχει* t *μεταξύ των* a *και* x *ώστε*

$$f(x) - T_{n,f,a}(x) := R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

(β) *(Μορφή Lagrange) Υπάρχει* s *μεταξύ των* a *και* x *ώστε*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(γ) *(Ολοκληρωτική μορφή) Αν η* $f^{(n+1)}$ *είναι ολοκληρώσιμη,*

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Θεώρημα Taylor: Απόδειξη

$a \rightsquigarrow t:$ $\quad f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x)$

Ορίζω: $\quad \phi : t \to R_{n,t}(x), \qquad t \in [c,d].$

$f(x) = f(t) + f'(t)g_1(t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}g_n(t) + \phi(t) \quad (t \in [c,d]).$

όπου $\quad g_k(t) = (x-t)^k.$

Ισχυρισμός: $\quad \exists \phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$ Απόδειξη:

$$\frac{d}{dt}f(x) = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}\left(f'(t)g_1(t)\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}g_n(t)\right) + \frac{d}{dt}\phi(t).$$

Επομένως

$$0 = f'(t) + \left(-f'(t) + f''(t)(x-t)\right) + \left(-f''(t)(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) +$$

$$\ldots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) + \phi'(t)$$

$$\Longrightarrow \phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Θεώρημα Taylor: Απόδειξη

Μορφή Cauchy: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής στην ϕ, παρατηρώντας ότι

$$\phi(t) = R_{n,f,t}(x) \;\text{ άρα }\; \phi(x) = 0 \text{ και } \phi(a) = R_{n,f,a}(x):$$

Υπάρχει t μεταξύ των a και x ώστε $\dfrac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a} = \phi'(t)$

$$\text{δηλαδή } \; \frac{-R_{n,a}(x)}{x-a} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\text{άρα } \; R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

Θεώρημα Taylor: Απόδειξη

Μορφή Lagrange Εφαρμόζουμε Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy (άκρα a και x) στις συναρτήσεις ϕ και $g_{n+1}(t) = (x-t)^{n+1}$:
Υπάρχει s μεταξύ των a και x ώστε

$$(\phi(x) - \phi(a))g'_{n+1}(s) = (g_{n+1}(x) - g_{n+1}(a))\phi'(s)$$

δηλαδή

$$(0 - R_{n,a}(x))(-(n+1)(x-s)^n) = (0-(x-a)^{n+1})\left(-\frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n\right)$$

$$\text{άρα}\quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Θεώρημα Taylor: Απόδειξη

Ολοκληρωτική μορφή: Η $f^{(n+1)}$, είναι ολοκληρώσιμη, και δείξαμε ότι

$$\phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Άρα και η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη.

Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα, έχουμε

$$-R_{n,a}(x) = \phi(x) - \phi(a) = \int_a^x \phi'(t)dt = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \qquad \square$$

Σειρές Taylor: Παραδείγματα

$$\boxed{\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{όταν} \quad -1 < x \leq 1.}$$

Ειδικότερα

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\boxed{(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad \text{όταν} \quad -1 < x < 1}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ και $\displaystyle\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n-1)}{n!}$.

Δυναμοσειρές

Ορισμός

Έστω (a_k) *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.4.1}$$

λέγεται ***δυναμοσειρά*** *με συντελεστές* a_k.

Πρόταση

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *μια δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k.

(α) *Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο* $y \neq 0$ *και αν* $|x| < |y|$, *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο* x.

(β) *Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* y *και αν* $|x| > |y|$, *τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* x.

Δυναμοσειρές

Ορισμός

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *είναι:*

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\} \in [0, +\infty].$$

Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$.

Πρόταση

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *μια δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k. *Η ακτίνα σύγκλισής της δίνεται από την*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}.$$

Παρατήρηση Αν $a_n \neq 0$ για κάθε n και υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} := L$ και είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$, τότε $R = 1/L$.

Συναρτήσεις παραστάσιμες σε δυναμοσειρά

Θεώρημα (θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών)

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά που συγκλίνει στο* $(-R,R)$ *για κάποιον* $R>0$. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ *με*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Τότε, η f *είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη: για κάθε* $k\in\mathbb{N}$ *και για κάθε* $|x|<R$ *ισχύει*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Επίσης,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad n=0,1,2,\dots$$

Για κάθε $|x|<R$, *η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[0,x]$ *και*

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Βήματα Απόδειξης:

• Παρατήρηση Η Δ.Σ. $\sum_n na_n x^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R με την $\sum_n a_n x^n$, γιατί $\limsup |a_k|^{1/k} = \limsup |ka_k|^{1/k}$.

• Έστω $x \in (-R, R)$ και $\delta > 0$ με $|x| + \delta < R$.
Εξετάζω την

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t}{t} \right|$$

για $0 < |t| < \delta$.

Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών

$$\left|(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t\right| = \left|(x^n + nx^{n-1}t + \cdots + t^n) - x^n - nx^{n-1}t\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}t^k\right| = t^2\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}t^{k-2}\right| \\
&\leq \frac{t^2}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}t^{k-2}\delta^2 \leq \frac{t^2}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}\delta^k \\
&\leq \frac{t^2}{\delta^2}(|x|+\delta)^n.
\end{aligned}$$

άρα

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| \leq \frac{|t|}{\delta^2}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+\delta)^n.$$

Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών

Επομένως το όριο καθώς $t \to 0$ υπάρχει και είναι μηδέν, δηλαδή

$$\exists\, f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- Εφαρμόζω για την f':

$$f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

...Για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $|x| < R$,

$$(2) \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Θέτοντας $x = 0$ στην (2) βλέπουμε ότι

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

για κάθε $k \geq 0$.

Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών

- Η δυναμοσειρά $\sum_n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R με την $\sum_n a_n x^n$. Αν

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

από το Θ.Παραγ. ΔΣ στην F παίρνουμε

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

άρα (θεμ. Θεώρημα)

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. $\square$

Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών

Πόρισμα (θεώρημα μοναδικότητας)

Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $R > 0$ ώστε

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. Τότε,

$$a_k = b_k \ \text{για κάθε}\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$