ΑΣΚΗΣΗ *Αν η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και αύξουσα, δείξτε ότι η* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *όπου* $g(y) := \frac{1}{y-a}\int_a^y f$ *είναι αύξουσα.*

ΛΥΣΗ: Έστω $a \le x < y \le b$. Να δείξω ότι $g(y) \ge g(x)$.

Από ΘΜΤ του $\int$κού Λογισμού στο $[a,x]$: Υπάρχει $s \in [a,x]$ ώστε $\int_a^x f = (x-a)f(s)$.

Το ίδιο στο $[x,y]$: Υπάρχει $t \in [x,y]$ ώστε $\int_x^y f = (y-x)f(t)$.

$$
\begin{aligned}
g(y) := \frac{1}{y-a}\int_a^y f &= \frac{1}{y-a}\left(\int_a^x f + \int_x^y f\right) \\
&= \frac{1}{y-a}\left((x-a)f(s) + (y-x)f(t)\right) \\
&\ge \frac{1}{y-a}\left((x-a)f(s) + (y-x)f(s)\right) \quad (f(t) \ge f(s)) \\
&= \frac{1}{y-a}\left((x-a) + (y-x)\right)f(s) = f(s) = g(x)\,.
\end{aligned}
$$

Αυτά...