# 1 Θεώρημα Μέσης Τιμής

**Ορισμός 1.1** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η $f$ έχει* ***τοπικό μέγιστο*** *στο $a$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε (ι) $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A$ και (ιι) $|x-a| < \delta \Rightarrow f(a) \geq f(x)$. Λέμε ότι η $f$ έχει* ***τοπικό ελάχιστο*** *στο $a$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε (ι) $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A$ και (ιι) $|x-a| < \delta \Rightarrow f(a) \leq f(x)$. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικό ελάχιστα λέγονται* ***τοπικά ακρότατα****.*

**Πρόταση 1.1 (Fermat)** *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in (a,b)$ και έχει τοπικό ακρότατο στο $x_o$, τότε $f'(x_o) = 0$.*

**Απόδειξη** Έστω $f'(x_o) = b \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b > 0$ (αλλιώς, θεωρούμε την $-f$). Επειδή $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$0 < |x-x_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} - b \right| < \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > \frac{b}{2} > 0.$$

Επομένως αν $x \in (x_o - \delta, x_o)$ τότε $x - x_o < 0$ άρα $f(x) - f(x_o) < 0$ οπότε $f(x) < f(x_o)$ και αν $y \in (x_o, x_o + \delta)$ τότε $y - x_o > 0$ άρα $f(y) - f(x_o) > 0$ οπότε $f(y) > f(x_o)$:

$$x_o - \delta < x < x_o < y < x_o + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_o) < f(y).$$

οπότε το $x_o$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. $\square$

Είναι χρήσιμο να απομονώσουμε μια παρατήρηση που κάναμε στη διάρκεια της απόδειξης:

**Λήμμα 1.2** *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in (a,b)$ και $f'(x_o) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$x_o - \delta < x < x_o < y < x_o + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_o) < f(y). \tag{1}$$

**Παρατήρηση 1.3** *Η σχέση (1) δεν συνεπάγεται ότι η $f$ είναι αύξουσα στο $(x_o - \delta, x_o + \delta)$: αν τα $x$ και $y$ είναι και τα δύο π.χ. στο $(x_o, x_o + \delta)$ τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*[1]

[1] Παράδειγμα: αν $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$, τότε παρόλο που η $f'(0)$ υπάρχει και ισούται με $\frac{1}{2}$, η $f$ δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα $(-\delta, \delta)$ γύρω από το 0. Πράγματι, αν $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ και $z_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$ $(n \in \mathbb{N})$, τότε $x_n > y_n > z_n$ αλλά $f(x_n) < f(y_n)$ και $f(y_n) > f(z_n)$, όπως προκύπτει μετά από πράξεις.

**Πρόταση 1.4 (Rolle)** *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $f|_{(a,b)}$ είναι παραγωγίσιμη. Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f'(\xi) = 0$.*

**Απόδειξη** Αφού η $f$ είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Υπάρχουν λοιπόν $x_1, x_2 \in [a,b]$ με $f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Αν η $f$ είναι σταθερή, τότε $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (a,b)$. Αν όχι, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$, οπότε (εφόσον $f(a) = f(b)$) κάποιο από τα $x_1$, $x_2$ θα είναι στο $(a,b)$. Αν $x_1 \in (a,b)$, τότε η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_1$, άρα $f'(x_1) = 0$ από την Πρόταση του Fermat. Με τον ίδιο τρόπο, αν $x_2 \in (a,b)$, τότε $f'(x_2) = 0$. $\square$

**Παρατήρηση 1.5** *Η συνέχεια της $f$ στο $[a,b]$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Αν π.χ. η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί $f(0) = 1$ και $f(x) = x$ όταν $x \in (0,1]$ τότε $f(0) = f(1)$ αλλά $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.*

**Θεώρημα 1.6 (Μέσης Τιμής)** *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $f|_{(a,b)}$ παραγωγίσιμη. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*(Γεωμετρικά: υπάρχει ένα σημείο $(\xi, f(\xi))$ στο γράφημα της $f$ όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη χορδή που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.)*

**Απόδειξη** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

(παρατήρησε ότι $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(a, f(a))$ και έχει κλίση $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$). Η $g$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο $(a,b)$ και $g(a) = g(b) = 0$. Από την Πρόταση του Rolle, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $g'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi). \qquad \square$$

**Θεώρημα 1.7 (Darboux)** *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η εικόνα $f'((a,b))$ είναι διάστημα.*

**Απόδειξη** Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in (a,b)$ με $x < y$, τότε η $f'$ λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ $f'(x)$ και $f'(y)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f'(x) < f'(y)$ (αλλιώς θεωρούμε την $-f$). Έστω $\gamma$ με $f'(x) < \gamma < f'(y)$: θα βρούμε $\xi \in (x,y)$ ώστε $f'(\xi) = \gamma$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f(t) - \gamma t$, οπότε $g'(t) = f'(t) - \gamma$. Έχουμε $g'(x) < 0 < g'(y)$, επομένως *αν η $g'$ είχε υποτεθεί συνεχής*, θα βρίσκαμε το ζητούμενο $\xi$ εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

*Όμως μόνον για την $g$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής.* Υπάρχει λοιπόν $\xi \in [x,y]$ ώστε $g(\xi) = \min\{g(t) : t \in [x,y]\}$.

Για να συμπεράνουμε ότι $g'(\xi) = 0$ από την Πρόταση Fermat, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι $\xi \in (x,y)$: Ισχυρίζομαι ότι $\xi \neq x$. Πράγματι, αφού $g'(x) < 0$, όπως στο Λήμμα 1.2 υπάρχει $x_1 > x$ με $g(x_1) < g(x)$, οπότε η τιμή $g(x)$ δεν είναι ελάχιστη. Ομοίως, $\xi \neq y$, γιατί, αφού $g'(y) > 0$, από το Λήμμα 1.2 έπεται ότι υπάρχει $y_1 < y$ με $g(y_1) < g(y)$, άρα η τιμή $g(y)$ δεν είναι ελάχιστη.

Συνεπώς $\xi \in (x,y)$. Έπεται ότι η $g$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $\xi$ άρα (Fermat) $g'(\xi) = 0$, δηλαδή $f'(\xi) = \gamma$. $\square$

**Πόρισμα 1.8** *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η $f'$ διατηρεί πρόσημο στο $(a,b)$. Δηλαδή αν $f'(x) > 0$ για κάποιο $x \in (a,b)$ τότε $f'(t) > 0$ για κάθε $t \in (a,b)$. Και αν $f'(x) < 0$ για κάποιο $x \in (a,b)$ τότε $f'(t) < 0$ για κάθε $t \in (a,b)$.*

**Απόδειξη** Αν υπήρχαν $x, y \in (a,b)$ με $f'(x) < 0 < f'(y)$ τότε $f'(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (a,b)$ από το Θεώρημα Darboux. $\square$

**Παρατήρηση 1.9** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f|_{(a,b)}$ παραγωγίσιμη. Αν η $f$ είναι αύξουσα, τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Πράγματι, $f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ και, εφόσον η $f$ είναι αύξουσα, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ για κάθε $y \neq x$. Όμως αν η $f$ είναι γνησίως αύξουσα (οπότε $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$ για κάθε $y \neq x$) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f'(x) > 0$ παντού: παράδειγμα η $f(x) = x^3$.*

**Θεώρημα 1.10 (Κριτήρια Μονοτονίας)** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f|_{(a,b)}$ παραγωγίσιμη.*

***(α)*** *Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*

***(β)*** *Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε (και μόνον τότε) η $f$ είναι αύξουσα, δηλαδή $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.*

***(γ)*** *Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*

***(δ)*** *Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε (και μόνον τότε) η $f$ είναι φθίνουσα, δηλαδή $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*

***(ε)*** *Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε (και μόνον τότε) η $f$ είναι σταθερή.*

**Η ιδέα της απόδειξης:** Έστω $a \leq x < y \leq b$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην $f|_{[x,y]}$, βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ με

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x).$$

**Πόρισμα 1.11** *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω ότι οι $f'$ και $g'$ υπάρχουν και είναι ίσες στο $(a,b)$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(t) = g(t) + c$ για κάθε $t \in [a,b]$.*

**Παρατήρηση 1.12** *Η υπόθεση ότι η $f$ ορίζεται σε διάστημα δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : [0,1] \cup [2,3]$ με $f(x) = 1$ για $x \in [0,1]$ και $f(x) = -1$ για $x \in [2,3]$ δεν είναι σταθερή, ενώ $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (2,3)$. Επίσης η $f(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$ ικανοποιεί $f'(x) = -1/x^2 < 0$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά δεν είναι φθίνουσα.*

**Παράδειγμα 1.13** *Αν $p \in \mathbb{Q}$ και $p > 1$ τότε $(1+x)^p > 1 + px$ για κάθε $x > -1$. (Για $p \in \mathbb{N}$ έχουμε την ανισότητα Bernoulli.)*

**Απόδειξη** Έστω $f(x) = (1+x)^p - (1+px)$. Έχουμε $f'(x) = p(1+x)^{p-1} - p$ άρα $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2} > 0$ για $x > -1$. Επομένως η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Εφόσον $f'(0) = 0$, έχουμε:

στο $(-1,0)$ : $f'(x) < 0$ άρα η $f$ γνησίως φθίνουσα, άρα $f(x) > f(0) = 0$ και

στο $(0,+\infty)$ : $f'(x) > 0$ άρα η $f$ γνησίως αύξουσα, άρα $f(x) > f(0) = 0$.

**Θεώρημα 1.14** *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι σε κάποιο $x_o \in (a,b)$ έχουμε $f'(x_o) = 0$ και η $f''(x_o)$ υπάρχει. Τότε*

***(ι)*** *Αν $f''(x_o) > 0$, τότε η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_o$.*

***(ιι)*** *Αν $f''(x_o) < 0$, τότε η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_o$.*

Θα αποδείξουμε πρώτα την ακόλουθη Πρόταση:

**Πρόταση 1.15** *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $a < x_o - \delta < x_o < x_o + \delta < b$.*

***(ι)*** *Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o - \delta, x_o)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, x_o + \delta)$, τότε η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_o$.*

***(ιι)*** *Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o - \delta, x_o)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o, x_o + \delta)$, τότε η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_o$.*

***(ιιι)*** *Αν η $f'$ διατηρεί πρόσημο στο $(x_o - \delta, x_o + \delta)$, (δηλ. ικανοποιεί $f'(x)f'(y) > 0$ για κάθε $x, y \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$) τότε η $f$ δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $x_o$.*

*Τα παραπάνω ισχύουν και αν υποτεθεί μόνον ότι η $f$ είναι συνεχής στο $(a,b)$ και παραγωγίσιμη στο $(x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$.*

**Απόδειξη** (ι) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o - \delta, x_o)$, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_o - \delta, x_o)$. Αν λοιπόν $x_o - \delta < s < t < x_o$ έχουμε $f(s) > f(t)$ άρα $f(x_o) = \lim_{t \nearrow x_o} f(t) \leq f(s)$ [μάλιστα $f(x_o) < f(s)$ (γιατί;)]. Επίσης επειδή $f'(y) > 0$ για κάθε $y \in (x_o, x_o + \delta)$ η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_o, x_o + \delta)$ οπότε ομοίως έχουμε $f(x_o) \geq f(u)$ για κάθε $u \in (x_o, x_o + \delta)$.

Το (ιι) αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Για το (ιιι), αν για παράδειγμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_o - \delta, x_o)$ και στο $(x_o, x_o + \delta)$. Αφού είναι συνεχής, έπεται ότι θα είναι γνησίως αύξουσα στην ένωση $(x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$, επομένως δεν μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_o$.

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη δεν χρησιμοποιήθηκε η ύπαρξη της παραγώγου στο $x_o$. $\square$

**Παρατήρηση 1.16** *Η συνέχεια της $f$ στο $x_o$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Ένα παράδειγμα είναι η $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} -x & \text{αν } -1 < x < 0 \\ x+1 & \text{αν } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ η οποία δεν έχει ελάχιστο στο $x_o = 0$, παρόλο που $f'(x) < 0$ όταν $x < 0$ και $f'(x) > 0$ όταν $x > 0$.*

**Απόδειξη Θεωρήματος 1.14** Έστω ότι $f''(x_o) > 0$. Εξετάζουμε τη συνάρτηση $g = f'$. Αφού η $g'(x_o)$ υπάρχει και είναι θετική, από το Λήμμα 1.2 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x_o - \delta < x < x_o < y < x_o + \delta \quad \Rightarrow \quad f'(x) < f'(x_o) < f'(y).$$

Αφού $f'(x_o) = 0$, το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 1.15.

Ομοίως αποδεικνύεται το (ιι). $\square$

**Παρατήρηση 1.17** *Αν $f'(x_o) = f''(x_o) = 0$, τότε δεν έχουμε εν γένει καμμία πληροφορία. Για παράδειγμα, αν $f_1(x) = x^4, f_2(x) = -x^4, f_3(x) = x^5$, τότε στο 0 η $f_1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, η $f_2$ τοπικό μέγιστο και η $f_3$ ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.*

**Πρόταση 1.18** *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε*

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \qquad (x \in (a,b)).$$

**Απόδειξη** Σταθεροποιούμε ένα $x \in (a,b)$. Παρατήρησε πρώτα ότι αν αλλάξω το $h$ σε $-h$ η παράσταση

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

δεν αλλάζει. Άρα αρκεί να εξετάσουμε το πλευρικό όριο καθώς $h \to 0_+$.

Έστω λοιπόν $h > 0$ ώστε $[x-h, x+h] \subseteq (a,b)$. Ορίζουμε μια «διορθωτική» συνάρτηση $g : [-h,h] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) - \frac{t^2}{h^2}(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x))$$

οπότε $g(-h) = g(h) = 0$. Η $g$ είναι συνεχής στο $[-h,h]$ και παραγωγίσιμη στο $(-h,h)$. Επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_h \in (-h,h)$ ώστε $g'(\xi_h) = 0$. Έχουμε (υπενθύμιση: τα $x$ και $h$ είναι σταθερά)

$$g'(\xi_h) = (f'(x+\xi_h) - f'(x-\xi_h)) - 2\frac{\xi_h}{h^2}(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)) = 0$$

άρα

$$\frac{f'(x+\xi_h) - f'(x-\xi_h)}{2\xi_h} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}. \tag{2}$$

Καθώς $h \to 0$ έχουμε $\xi_h \to 0$ γιατί $|\xi_h| < h$. Εφόσον η $f''(x)$ υπάρχει, τα όρια

$$\lim_{s\to 0_+} \frac{f'(x+s) - f'(x)}{s} \quad \text{και} \quad \lim_{s\to 0_-} \frac{f'(x+s) - f'(x)}{s} = \lim_{t\to 0_+} \frac{f'(x-t) - f'(x)}{-t}$$

υπάρχουν και είναι ίσα, και συνεπώς το αριστερό σκέλος της (2) τείνει στο

$$\lim_{\xi_h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x+\xi_h) - f'(x)}{\xi_h} + \frac{f'(x) - f'(x-\xi_h)}{\xi_h}\right) = f''(x).$$

Επομένως το όριο του δεξιού σκέλους της (2) υπάρχει και ισούται με $f''(x)$. $\square$

**Σημείωση** Το αντίστροφο της Πρότασης δεν ισχύει γενικά: η συνάρτηση $f(x) = x|x|$ δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0, αλλά το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h^2 - h^2}{h^2}$$

υπάρχει και είναι μηδέν.

**Παρατήρηση 1.19** *Έστω ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(a,b)$ και παραγωγίσιμη στο $(a,b)\setminus\{x_o\}$. Αν το όριο $\lim_{x\to x_o} f'(x)$ υπάρχει, τότε η $f'$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $x_o$.*

**Απόδειξη** Έστω $\lim_{x\to x_o} f'(x) = c$. Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f'(x) - c| < \varepsilon.$$

Έστω $0 < h < \delta$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην $f|_{[x_o,x_o+h]}$, βρίσκουμε $\xi_h \in (x_o, x_o + h)$ ώστε $f(x_o + h) - f(x_o) = f'(\xi_h)h$. Έχουμε

$$\left|\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} - c\right| = |f'(\xi_h) - c| < \varepsilon$$

αφού $0 < |x_o - \xi_h| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι το *πλευρικό όριο* $\lim_{h\to 0_+} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ υπάρχει και ισούται με $c$. Με τον ίδιο τρόπο (θεωρώντας την $f|_{[x_o-h,x_o]}$) βρίσκουμε ότι το *άλλο πλευρικό όριο* $\lim_{h\to 0_-} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ υπάρχει και ισούται επίσης με $c$. Επομένως
το όριο $f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ υπάρχει και ισούται με $c = \lim_{x\to x_o} f'(x)$.
□

**Ορισμός 1.2** *Το* πλευρικό όριο $\lim_{h\to 0_+} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$, *όταν υπάρχει, ονομάζεται η* ***δεξιά παράγωγος*** *της $f$ στο $x_o$ και συμβολίζεται $f'_+(x_o)$. Ομοίως το* πλευρικό όριο $\lim_{h\to 0_-} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$, *όταν υπάρχει, ονομάζεται η* ***αριστερά παράγωγος*** *της $f$ στο $x_o$ και συμβολίζεται $f'_-(x_o)$.*

**Παρατήρηση 1.20** *Παρατηρούμε ότι η απόδειξη της προηγούμενης παρατήρησης έδειξε ότι:*

*Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_{o+}} f'(x)$ τότε υπάρχει η δεξιά παράγωγος και $f'_+(x_o) = \lim_{x\to x_{o+}} f'(x)$ (ομοίως για την αριστερά παράγωγο).*

**Θεώρημα 1.21 (Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy)**
*Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $(a,b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

**Απόδειξη** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$$

που είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο $(a, b)$. Παρατηρούμε ότι $h(b) = 0 = h(a)$, επομένως από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(\xi) = 0. \qquad \square$$

**Πόρισμα 1.22** *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $(a, b)$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι*
*(α) $g(b) \neq g(a)$ και*
*(β) Οι συναρτήσεις $f'$ και $g'$ δεν έχουν κοινή ρίζα στο $(a, b)$.*
*Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Απόδειξη** Από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

$$\text{ισοδύναμα} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = f'(\xi).$$

Όμως $g'(\xi) \neq 0$, γιατί αν $g'(\xi) = 0$ τότε από την τελευταία ισότητα θα είχαμε και $f'(\xi) = 0$, αντίθετα με την υπόθεση (β). Διαιρώντας λοιπόν με $g'(\xi)$ προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

**Θεώρημα 1.23 (L'Hospital)** *Έστω $f, g : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*[2]

*(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$.*

*(β) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.*

*Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[2](από τις σημειώσεις του Α. Γιαννόπουλου)

**Απόδειξη** Επεκτείνουμε τις $f$ και $g$, ορίζοντάς τις στο $x_0$ με $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Αφού

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

οι $f$ και $g$ γίνονται τώρα συνεχείς στο $(a, b)$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

για κάθε $x \in (x_0, b)$. Οι $f', g'$ δεν έχουν κοινή ρίζα στο $(x_0, x)$ γιατί η $g'$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Επίσης $g(x) \neq 0$, δηλαδή $g(x) - g(x_0) \neq 0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy (Πόρισμα 1.22) μπορούμε για κάθε $x \in (x_0, b)$ να βρούμε $\xi_x \in (x_0, x)$ ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x_0 < \xi < x_0 + \delta$ τότε

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Επομένως αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ τότε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

(γιατί $x_0 < \xi_x < x < x_0 + \delta$). Άρα,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. □

Ο αντίστοιχος κανόνας για το $+\infty$ είναι ο εξής.

**Θεώρημα 1.24** *Έστω $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

*(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x > a$.*

*(β) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.*

*Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $f_1, g_1 : \left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{και} \quad g_1(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Οι $f_1, g_1$ είναι παραγωγίσιμες και

$$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Έχουμε $\lim_{x\to0^+} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to0^+} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, $g_1(x) \neq 0$ και $g_1'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1/a)$. Τέλος,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Άρα, εφαρμόζεται το Θεώρημα 1.23 για τις $f_1, g_1$ και έχουμε

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

έπεται το ζητούμενο. $\square$